普通高等院校大学数学“十三五”规划教材

高等数学（同济第七版 上册）
习题辅导书

主　编　常桂娟

副主编　姜德民　孙宝山　赵　静　吴春妹

参　编　姜兆英　孙春薇　吴　伟　王述香　曹秀梅

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

《高等数学（同济第七版 上册）》包括七章内容，因此《高等数学（同济第七版 上册）习题辅导书》相应地包含七章的习题及其解答，每章内容包括基本内容、基本要求和习题解答。此外，书中还提供历年考研部分试题及解答、《高等数学（上册）》期末考试试卷选编及参考答案。全书习题丰富，解答详细完整，图表清晰，是学好高等数学课程的首选练习册和优秀的考研指导书。

本书可作为高等学校工科学生高等数学课程的复习指导和练习册，也可作为考研人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（同济第七版）习题辅导书. 上册/常桂娟主编. —北京：电子工业出版社，2015.7

ISBN 978-7-121-26304-0

I. ①高… II. ①常… III. ①高等数学—高等学校—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 127825 号

策划编辑：王羽佳
责任编辑：王羽佳 特约编辑：王 崧
印 刷：
装 订：
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编：100036
开 本：787×1092 1/16 印张：20 字数：512 千字
版 次：2015 年 7 月第 1 版
印 次：2015 年 7 月第 1 次印刷
定 价：45.00 元

前　言

本书是与同济大学数学系编写的教材《高等数学（第七版）》相配套的辅导教材. 同济大学数学系编写的《高等数学》是本科生学习高等数学的经典之作。因此，本书也力求成为更适合大学生学习《高等数学》的指导书, 可作为报考硕士研究生入学考试的复习参考书, 还可为高等数学教师批改作业或备课提供参考.

为方便读者使用, 本书在内容上严格按照同济大学《高等数学（第七版）》的各章顺序对应编写, 其内容包括三篇.

第一篇是《高等数学（上册）》习题解答, 内容包括：① 基本内容, 列出各章节的基本理论知识; ② 基本要求, 提出学生对各章节知识点需要掌握的程度; ③ 习题解答, 给出《高等数学（上册）》教材各章节习题、总习题的解答.

第二篇是历年考研部分试题及解答, 内容涵盖函数、极限、连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程, 并给出了每道试题的年份及类别, 学生可以根据自己的具体情况进行选做.

第三篇是《高等数学（上册）》试卷选编及参考答案.

本书由青岛农业大学理学与信息科学学院数学教师编写. 其中, 第一篇的第 1 章由吴春妹编写; 第 2 章由孙宝山编写; 第 3 章由孙春薇编写; 第 4 章由曹秀梅编写; 第 5 章由赵静编写; 第 6 章由王述香编写; 第 7 章的第 1 节至第 4 节由姜兆英编写, 第 5 节至第 10 节由吴伟编写. 第二篇历年考研部分试题及解答由姜德民编写; 第三篇及最终的统稿、定稿由常桂娟完成.

由于时间仓促, 在编写上难免会有错误, 敬请同行、专家、读者批评指正.

编　者

2015 年 4 月

目　　录

第一篇　《高等数学（上册）》习题解答

第二篇　历年考研部分试题及解答

第三篇　《高等数学（上册）》期末考试试卷选编及参考答案

第 一 篇

《高等数学（上册）》习题解答

第 1 章

函数与极限

一、基 本 内 容

1. 映射与函数
   (1) 映射: 映射概念、逆映射与复合映射;
   (2) 函数.
      ① 函数概念;
      ② 函数的几种特性: 有界性、单调性、奇偶性、周期性;
      ③ 反函数与复合函数;
      ④ 函数的运算: 和、差、积、商;
      ⑤ 初等函数.
2. 数列的极限
   (1) 数列极限的定义;
   (2) 收敛数列的性质: 极限的唯一性、收敛数列的有界性、收敛数列的保号性、收敛数列与其子数列间的关系.
3. 函数的极限
   (1) 函数极限的定义.
      ① 自变量趋于有限值时函数的极限;
      ② 自变量趋于无穷大时函数的极限.
   (2) 函数极限的性质: 函数极限的唯一性、函数极限的局部有界性、函数极限的局部保号性、*函数极限与数列极限的关系.
4. 无穷小与无穷大
5. 极限运算法则
   (1) 极限的四则运算法则;
   (2) 复合函数的极限运算法则.
6. 极限存在准则与两个重要极限
   (1) 夹逼准则、单调有界准则;
   (2) 两个重要极限.
7. 无穷小的比较
8. 函数的连续性与间断点
   (1) 函数的连续性;

(2) 函数的间断点.

① 第一类间断点: 可去间断点、跳跃间断点;

② 第二类间断点: 无穷间断点、振荡间断点.

9. 连续函数的运算与初等函数的连续性

(1) 连续函数的和、差、积、商的连续性;

(2) 反函数与复合函数的连续性;

(3) 初等函数的连续性.

10. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性与最大值和最小值定理;

(2) 零点定理与介值定理;

*(3) 一致连续性.

二、基本要求

1. 理解函数的概念, 掌握函数的表示方法.
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念, 了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及图形.
5. 会建立简单应用问题中的函数关系.
6. 理解极限的概念, 理解函数左极限与右极限的概念, 及极限存在与左、右极限之间的关系.
7. 掌握极限的性质及四则运算法则.
8. 掌握极限存在的两个准则, 并会利用它们求极限, 掌握利用两个重要极限求极限的方法.
9. 理解无穷小、无穷大的概念, 掌握无穷小的比较方法, 会用等价无穷小求极限.
10. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续）, 会判别函数间断点的类型.
11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性, 了解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理）, 并会应用这些性质.

三、习题解答

习题 1-1

1. 求下列函数的自然定义域.

(1) $y=\sqrt{3x+2}$;　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;　(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;　(5) $y=\sin\sqrt{x}$;　(6) $y=\tan(x+1)$;

(7) $y=\arcsin(x-3)$;　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;　(9) $y=\ln(x+1)$;

(10) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

解　分析: 在此类题目中, 所给出的函数一般由一些简单函数组合而成, 因此函数自然定义域

的求解步骤一般为：首先求出各个简单函数的定义域，然后确定这些定义域的交集，这个交集就是函数的自然定义域. 定义域的表示方法一般有两种：描述法或区间. 在考查中常用到的函数及其定义域如下：

$y=\dfrac{A(x)}{B(x)}$，$\{x|\ B(x)\neq 0\}$；

$y=\sqrt[2n]{x}$，$\{x|\ x\geqslant 0\}$；

$y=\log_a x$，$\{x|\ x>0\}$；

$y=\tan x$，$\left\{x\left|\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right.\right\}$；

$y=\cot x$，$\{x|\ x\neq k\pi,k\in Z\}$；

$y=\arcsin x$，$\{x|\ |x|\leqslant 1\}$；

$y=\arccos x$，$\{x|\ |x|\leqslant 1\}$.

(1) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件 $3x+2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\dfrac{2}{3}$，从而函数的自然定义域为 $\left\{x\left|x\geqslant -\dfrac{2}{3}\right.\right\}$ 或 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件 $1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1$，从而函数的自然定义域为 $\{x|x\neq\pm 1\}$ 或 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件 $\begin{cases}x\neq 0\\1-x^2\geqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\neq 0\\x^2\leqslant 1\end{cases}$，又即 $\begin{cases}x\neq 0\\-1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$，从而函数的自然定义域为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\text{ 且 }x\neq 0\}$ 或 $[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件 $4-x^2>0\Rightarrow x^2<4\Rightarrow |x|<2\Rightarrow -2<x<2$，从而函数的自然定义域为 $\{x|-2<x<2\}$ 或 $(-2,2)$.

(5) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件 $x\geqslant 0$，从而函数的自然定义域为 $\{x|x\geqslant 0\}$ 或 $[0,+\infty)$.

(6) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件 $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in Z)$，从而函数的自然定义域为 $\left\{x\left|x\in R\text{ 且}x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1,k\in Z\right.\right\}$.

(7) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件 $-1\leqslant x-3\leqslant 1$ 即 $2\leqslant x\leqslant 4$，从而函数的自然定义域为 $\{x|2\leqslant x\leqslant 4\}$ 或 $[2,4]$.

(8) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件 $\begin{cases}3-x\geqslant 0\\x\neq 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\leqslant 3\\x\neq 0\end{cases}$，从而函数的自然定义域为 $\{x|x\leqslant 3\text{ 且}x\neq 0\}$ 或 $(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件 $x+1>0\Rightarrow x>-1$，从而函数的自然定义域为 $\{x|x>-1\}$ 或 $(-1,+\infty)$.

(10) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件 $x\neq 0$，从而函数的自然定义域为 $\{x|x\neq 0\}$ 或 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;　　(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;　　(4) $f(x)=1$, $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解　分析：函数 f 是从实数集到实数集的映射，因此构成函数的要素是：定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

(1) 不相同，因为定义域不同，其中 $D_f=\{x|x\neq 0\}$，而 $D_g=\{x|x>0\}$.

(2) 不相同. 因为对应法则不同，$g(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$.

(3) 相同，因为定义域和对应法则都相同.

(4) 不相同，因为定义域不相同，其中 $D_f=R$，而 $D_g=\left\{x\left|x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in Z\right.\right\}$.

3. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}, \\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解　$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\left|\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$；$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\left|-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$\varphi(-2)=0$.

函数 $y=\varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

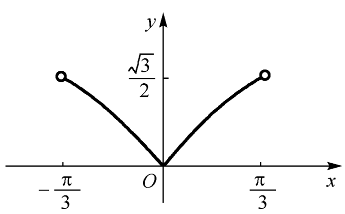


图 1-1

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性.

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$, $(-\infty,1)$;　　(2) $y=x+\ln x$, $(0,+\infty)$.

证明　分析：任意给定定义域内的两点 $x_1<x_2$，若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则函数 $y=f(x)$ 是单调递增函数，反之若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则函数为单调递减函数.

(1) 设 $f(x)=y=\dfrac{x}{1-x}$, $(-\infty,1)$.

任意给定 $x_1<x_2<1$，恒有 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{x_2}{1-x_2}-\dfrac{x_1}{1-x_1}=\dfrac{x_2-x_1}{(1-x_2)(1-x_1)}>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，

所以 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 在区间 $(-\infty,1)$ 内是单调递增的.

(2) 设 $f(x)=y=x+\ln x$, $(0,+\infty)$.

任意给定 $0<x_1<x_2$，恒有 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)+(\ln x_2-\ln x_1)=(x_2-x_1)+\ln\dfrac{x_2}{x_1}>0$，即

$f(x_2) > f(x_1)$，所以 $y = x + \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调递增的.

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证明 任意给定两点 $-l < x_1 < x_2 < 0$，有 $0 < -x_2 < -x_1 < l$，由 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内为奇函数，可得 $f(x_2) - f(x_1) = -f(-x_2) + f(-x_1) = f(-x_1) - f(-x_2)$，又 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加，得 $f(-x_1) - f(-x_2) > 0$，即有 $f(x_2) - f(x_1) > 0$，从而 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都定义在区间 $(-l, l)$ 上. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1) 设 $f_1(x)$ 和 $g_1(x)$ 均为定义在区间 $(-l, l)$ 上的偶函数，$F_1(x) = f_1(x) + g_1(x)$，则有

$$F_1(-x) = f_1(-x) + g_1(-x) = f_1(x) + g_1(x) = F_1(x),$$

即 $F_1(x)$ 为偶函数.

设 $f_2(x)$ 和 $g_2(x)$ 均为定义在区间 $(-l, l)$ 上的奇函数，$F_2(x) = f_2(x) + g_2(x)$，则有

$$F_2(-x) = f_2(-x) + g_2(-x) = -f_2(x) - g_2(x) = -F_2(x),$$

即 $F_2(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x)$ 和 $g_1(x)$ 均为定义在区间 $(-l, l)$ 上的偶函数，$F_1(x) = f_1(x) \cdot g_1(x)$，则有

$$F_1(-x) = f_1(-x) \cdot g_1(-x) = f_1(x) \cdot g_1(x) = F_1(x),$$

即 $F_1(x)$ 为偶函数.

设 $f_2(x)$ 和 $g_2(x)$ 均为定义在区间 $(-l, l)$ 上的奇函数，$F_2(x) = f_2(x) \cdot g_2(x)$，则有

$$F_2(-x) = f_2(-x) \cdot g_2(-x) = -f_2(x) \cdot -g_2(x) = F_2(x),$$

即 $F_2(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，$F(x) = f(x) \cdot g(x)$，则有

$$F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x) = -F(x),$$

因此 $F(x)$ 为奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y = x^2(1 - x^2)$；　(2) $y = 3x^2 - x^3$；　(3) $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$；

(4) $y = x(x-1)(x+1)$；　(5) $y = \sin x - \cos x + 1$；　(6) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$.

解 (1) $f(x) = y = x^2(1 - x^2)$，因为

$$f(-x) = (-x)^2(1 - (-x)^2) = x^2(1 - x^2) = f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(x) = y = 3x^2 - x^3$，因为

$$f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3,$$

可见 $f(-x) \neq f(x)$ 并且 $f(-x) \neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(3) $f(x)=y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，因为

$$f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $f(x)=y=x(x-1)(x+1)$，因为

$$f(-x)=(-x)(-x-1)(-x+1)=-x(x-1)(x+1)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $f(x)=y=\sin x-\cos x+1$，因为

$$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1,$$

可见 $f(-x)\neq f(x)$ 并且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(6) $f(-x)=y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，可见

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

8. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos\left(x-2\right)$；　(2) $y=\cos 4x$；　(3) $y=1+\sin \pi x$；

(4) $y=x\cos x$；　(5) $y=\sin^2 x$.

解 (1)是周期函数，周期 $l=2\pi$. (2)是周期函数，周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$. (3)是周期函数，周期 $l=2$. (4)不是周期函数. (5)是周期函数，周期 $l=\pi$.

9. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq 0)$；

(4) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；(5) $y=1+\ln(x+2)$；　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解 (1) 因为 $y=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow x+1=y^3\Rightarrow x=y^3-1$，所以 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 因为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}\Rightarrow x=\dfrac{1-y}{1+y}$，所以 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 因为 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\dfrac{dy-b}{a-cy}$，所以 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为 $y=\dfrac{dx-b}{a-cx}$.

(4) 因为 $y=2\sin 3x\Rightarrow \sin 3x=\dfrac{y}{2}\Rightarrow 3x=\arcsin\dfrac{y}{2}\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，所以 $y=2\sin 3x$ 的反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}\ \left(|x|\leqslant 2\right)$.

(5) 因为 $y=1+\ln(x+2)\Rightarrow \ln(x+2)=y-1\Rightarrow x+2=\mathrm{e}^{y-1}\Rightarrow x=\mathrm{e}^{y-1}-2$，故 $y=1+\ln(x+2)$ 的反函数为 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2$.

(6) 因为 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}\Rightarrow y\cdot 2^x+y=2^x\Rightarrow(1-y)2^x=y\Rightarrow 2^x=\dfrac{y}{1-y}\Rightarrow x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，故 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

10. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明 必要性：设 $f(x)$ 在 X 上有界，即存在 $M>0$，使得对于 $\forall x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，即

$$-M<f(x)<M\ ,$$

可得 $f(x)$ 既存在上界 M 又存在下界 $-M$.

充分性：设 $f(x)$ 在 X 上既有上界 M_1 又有下界 M_2，即对于 $\forall x\in X$，有 $f(x)<M_1$ 且 $f(x)>M_2$. 取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$，则有

$$|f(x)|<M，\forall x\in X\ .$$

即函数 $f(x)$ 在 X 上有界.

11. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求该函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值.

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$，$x_1=\dfrac{\pi}{6}$，$x_2=\dfrac{\pi}{3}$；　　(2) $y=\sin u$，$u=2x$，$x_1=\dfrac{\pi}{8}$，$x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$，$x_1=1$，$x_2=2$；　　(4) $y=\mathrm{e}^u$，$u=x^2$，$x_1=0$，$x_2=1$；

(5) $y=u^2$，$u=\mathrm{e}^x$，$x_1=1$，$x_2=-1$.

解 (1) 复合函数 $y=(\sin x)^2$，$y_1=\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，$y_2=\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2=\dfrac{3}{4}$.

(2) $y=\sin(2x)$，$y_1=\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$，$y_1=\sqrt{2}$，$y_2=\sqrt{5}$.

(4) $y=\mathrm{e}^{x^2}$，$y_1=1$，$y_2=\mathrm{e}$.

(5) $y=\mathrm{e}^{2x}$，$y_1=\mathrm{e}^2$，$y_2=\mathrm{e}^{-2}$.

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域.

(1) $f(x^2)$；　(2) $f(\sin x)$；(3) $f(x+a)\ (a>0)$；　(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

解 (1) 由 $0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$，可得 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

(2) 由 $0\leqslant\sin x\leqslant 1\Rightarrow x\in[2k\pi,2k\pi+\pi],k\in Z$，可得 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi,2k\pi+\pi],k\in Z$.

(3) 由 $0\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow -a\leqslant x\leqslant 1-a$，可得 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a,1-a]$.

(4) 由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$，可得：当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的

定义域为$[a,1-a]$；当$a>\dfrac{1}{2}$时，定义域为ϕ.

13. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\qquad g(x)=\mathrm{e}^x,$$

求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)]=f(\mathrm{e}^x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$，$\quad g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1\end{cases}$.

$f[g(x)]$和$g[f(x)]$的图形分别如图 1-2 和图 1-3 所示.

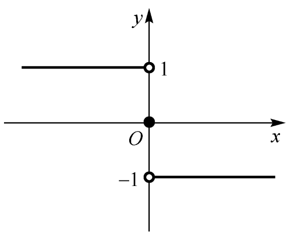


图 1-2

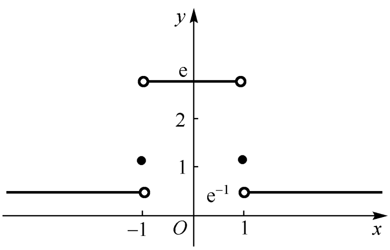


图 1-3

14. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角$\varphi=40^\circ$（见图 1-4）. 当过水断面$ABCD$的面积为定值S_0时，求湿周L（$L=AB+BC+CD$）与水深h之间的函数关系式，并指明其定义域.

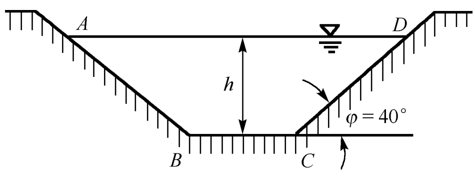


图 1-4

解 由题意可得$AB=CD=\dfrac{h}{\sin 40^\circ}$，又

$$S_0=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot h=\frac{1}{2}h[(2h\cdot\cot 40^\circ+BC)+BC],$$

从而可得$BC=\dfrac{S_0}{h}-h\cdot\cot 40^\circ$. 于是有

$$L=2\cdot\frac{h}{\sin 40^\circ}+\left(\frac{S_0}{h}-h\cdot\cot 40^\circ\right)=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h.$$

根据实际意义，要使得上述算式有意义，需满足以下条件:

$$\begin{cases}BC=\dfrac{S_0}{h}-h\cdot\cot 40^\circ>0\\ h>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h<\sqrt{S_0\cdot\tan 40^\circ}\\ h>0\end{cases}\Rightarrow 0<h<\sqrt{S_0\cdot\tan 40^\circ},$$

即函数L的定义域为$(0,\ \sqrt{S_0\cdot\tan 40^\circ})$.

15. 设 xOy 平面上有正方形 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\right\}$ 及直线 $l:x+y=t(t\geqslant 0)$，若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $S(t)$ 与 t 之间的函数关系.

解 分情况讨论:

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$S(t)=\dfrac{1}{2}t^2$；

当 $1<t\leqslant 2$ 时，$S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2+\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}(t-1)\right)\right]\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}(t-1)=-\dfrac{1}{2}t^2+2t-1$；

当 $t>2$ 时，$S(t)=1$.

所以 $S(t)$ 与 t 之间的函数关系为 $S\left(t\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ -\dfrac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2\\ 1, & t>2\end{cases}$.

16. 求联系华氏温度（用 F 表示）和摄氏温度（用 C 表示）的转换公式，并求:

(1) 90°F 的等价摄氏温度和 -5°C 的等价华氏温度;

(2) 是否存在一个温度值，使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的？如果存在，那么该温度值是多少?

解 设 $F=aC+b$，其中 a，b 均为常数.

因为 $F=32^\circ$F 相当于 $C=0^\circ$C，$F=212^\circ$F 相当于 $C=100^\circ$C，所以可得

$$b=32,\ a=\frac{212-32}{100}=1.8,$$

因此有华氏温度和摄氏温度的转换公式 $F=1.8C+32$ 或 $C=\dfrac{5}{9}(F-32)$.

(1) 当 $F=90^\circ$F 时，得 $C=\dfrac{5}{9}(90-32)\approx 32.2^\circ$；当 $C=-5^\circ$ 时，得 $F=1.8\times(-5)+32=23^\circ$F.

(2) 不妨假设存在温度值 t，使其对应的华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的，则有

$$t=1.8t+32\Rightarrow t=-40.$$

即华氏温度 $F=-40^\circ$F 时，摄氏温度 C 也为 -40°C.

17. 已知 RtΔABC 中，直角边 AC、BC 的长度分别为 20、15，动点 P 从 C 出发，沿三角形边界按 $C\to B\to A$ 方向移动；动点 Q 从 C 出发，沿三角形边界按 $C\to A\to B$ 方向移动，移动到两动点相遇时为止，且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍. 设动点 P 移动的距离为 x，ΔCPQ 的面积为 y，试求 y 与 x 之间的函数关系.

解 分情况讨论:

当 $0<x<10$ 时，点 P 位于直角边 BC 上，点 Q 位于直角边 AC 上，此时 ΔCPQ 的面积为

$y=\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot 2x=x^2$；

当 $10\leqslant x\leqslant 15$ 时，点 P 位于直角边 BC 上，点 Q 位于斜边 AB 上，此时 ΔCPQ 中边 CP 所对应的高为 $h_1=\dfrac{4}{5}\left(45-2x\right)$，从而有

$$y=\frac{1}{2}\cdot x\cdot h_1=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{4}{5}(45-2x)=-\frac{4}{5}x^2+18x;$$

当$15<x<20$时，点P和Q均位于斜边AB上，此时ΔCPQ中边PQ所对应的高为$h_2=12$，从而有

$$y=\frac{1}{2}\cdot[25-(2x-20)-(x-15)]\cdot h_2=-18x+360.$$

所以y与x之间的函数关系为$y=\begin{cases} x^2, & 0<x<10 \\ -\frac{4}{5}x^2+18x, & 10\leqslant x\leqslant 15 \\ -18x+360, & 15<x<20 \end{cases}$.

18. 利用以下美国人口普查局提供的世界人口数据及指数模型来推测 2020 年的世界人口.

年份	人口数/百万	年增长率/%
2008	6708.2	1.166
2009	6786.4	1.140
2010	6863.8	1.121
2011	6940.7	1.107
2012	7017.5	1.107
2013	7095.2	

解 由人口数据表格可见，从 2008 年至 2013 年，人口的年增长率介于 1.107 和 1.166 之间，并且由数据出现的规律可猜想：2012 年后任意一年的人口数是前一年人口数的 1.011 倍. 于是，得到 2008 年后的第t年，世界人口数将达到

$$P(t)=6708\cdot(1.011)^t\ (\text{百万}).$$

而 2020 年对应的$t=12$，于是有

$$P(12)=6708\cdot(1.011)^{12}\approx 76\ (\text{亿}),$$

即推测 2020 年的世界人口数约为 76 亿.

习题 1-2

1. 下列各题中，哪些数列收敛？哪些数列发散？对收敛数列，通过观察$\{x_n\}$的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$；　(2) $\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$；　(3) $\left\{2+\frac{1}{n^2}\right\}$；　(4) $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$；

(5) $\left\{n(-1)^n\right\}$；　(6) $\left\{\frac{2^n-1}{3^n}\right\}$；　(7) $\left\{n-\frac{1}{n}\right\}$；　(8) $\left\{\left[(-1)^n+1\right]\frac{n+1}{n}\right\}$.

解 (1) 收敛，并且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$. (2) 收敛，并且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$.

(3) 收敛，并且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2$. (4) 收敛，并且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$.

(5) 数列 $x_n=n(-1)^n$ 发散. (6) 收敛, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$.

(7) 数列 $x_n=n-\frac{1}{n}$ 发散. (8) 数列 $x_n=\left[(-1)^n+1\right]\frac{n+1}{n}$ 发散.

2. (1) 数列的有界性是数列收敛的什么条件？(2) 无界数列是否一定发散？(3) 有界数列是否一定收敛？

解 (1) 必要条件; (2) 一定发散; (3) 不一定收敛, 如有界数列 $\left\{(-1)^n\right\}$ 发散.

3. 下列关于数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a 的定义, 哪些是对的，哪些是错的？ 如果是对的, 试说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

(1) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时, 不等式 $x_n-a<\varepsilon$ 成立;

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时, 有无穷多项 x_n, 使不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立;

(3) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时, 不等式 $|x_n-a|<c\varepsilon$ 成立, 其中 c 为某个正常数;

(4) 对于任意给定的 $m\in\mathbf{N}_+$, 存在 $N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时, 不等式 $|x_n-a|<\frac{1}{m}$ 成立.

解 (1) 错误, 举例: 数列 $x_n=\frac{1}{n}$, $a=2$, 对于任意给定的 $\varepsilon=0.1>0$, 存在 $N=1$, 当 $n>N$ 时, 不等式 $x_n-a<\varepsilon$ 恒成立, 但显然 $a=2$ 不是数列 $\{x_n\}$ 的极限.

(2) 错误, 举例: 数列 $x_n=(-1)^n$, $a=1$, 对于任意给定的 $\varepsilon=0.1>0$, 存在 $N=1$, 当 $n>N$ 时, 有无穷多项 x_n, 使不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立, 而数列 $\left\{(-1)^n\right\}$ 无极限.

(3) 正确, 理由略; (4) 正确, 理由略.

* **4.** 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$. 问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=?$ 求出 N, 使得当 $n>N$ 时, x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε. 当 $\varepsilon=0.001$ 时, 求出数 N.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0$, 证明如下:

因为 $|x_n-0|=|x_n|=\frac{1}{n}\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $|x_n-0|<\varepsilon$, 只需 $\frac{1}{n}<\varepsilon$, 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$|x_n-0|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时, $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=1000$. 即若取 $\varepsilon=0.001$, 则当 $n>1000$ 时, 恒有 $|x_n-0|<0.001$.

***5.** 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}=1$.

解 (1) 因为 $|x_n-0|=\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|=\dfrac{1}{n^2}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $|x_n-0|<\varepsilon$, 只需 $\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$, 即 $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

取 $N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$, 则当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-0|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

(2) 因为 $\left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|=\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\left|\dfrac{1}{2(2n+1)}\right|<\dfrac{1}{4n}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$, 只需 $\dfrac{1}{4n}<\varepsilon$, 即 $n>\dfrac{1}{4\varepsilon}$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时, 恒有 $\left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

(3) 因为 $|x_n-1|=\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\dfrac{a^2}{n\left(\sqrt{n^2+a^2}+n\right)}<\dfrac{a^2}{2n^2}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $|x_n-1|<\varepsilon$, 只需 $\dfrac{a^2}{2n^2}<\varepsilon$, 即 $n>\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}$. 取 $N=\left[\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$, 则当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-1|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4) 因为 $\left|\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}-1\right|=\dfrac{1}{10^{n-1}}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $|x_n-1|=\left|\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}-1\right|<\varepsilon$, 只需 $\dfrac{1}{10^{n-1}}<\varepsilon$, 即 $n>1+\lg\dfrac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[1+\lg\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-1|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}=1$.

***6.** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明: 若数列 $\{|x_n|\}$ 有极限, 则数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

证明 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in N^+$, 当 $n>N$ 时, 有 $|u_n-a|<\varepsilon$, 从而

$$\big||u_n|-|a|\big|<|u_n-a|<\varepsilon$$

即有 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

但数列 $\{|x_n|\}$ 有极限时, 数列 $\{x_n\}$ 未必有极限. 比如 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n\dfrac{3n+1}{2n+1}\right|=\dfrac{3}{2}$, 但是 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{3n+1}{2n+1}$ 不存在.

***7.** 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明 由数列 $\{x_n\}$ 有界 $\Rightarrow\exists M>0$, 使得对于 $\forall n$, 有 $|x_n|<M$. 又由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ 可知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in N^+$, 使得当 $n>N$ 时, 恒有 $|y_n-0|=|y_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$. 从而有

$$|x_ny_n-0|=|x_n||y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

从而得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

***8.** 对于数列$\{x_n\}$,若$x_{2k-1}\to a\,(k\to\infty)$,$x_{2k}\to a\,(k\to\infty)$，证明$x_n\to a\,(n\to\infty)$.

证明 因为$x_{2k-1}\to a\,(k\to\infty)$，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in N^+$，使得当$2k-1>N_1$时，恒有$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$.

又$x_{2k}\to a\,(k\to\infty)$，所以对于上述$\varepsilon$，$\exists N_2\in N^+$，使得$2k>N_2$时，恒有$|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n>N$时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

即$x_n\to a(n\to\infty)$.

习题 1-3

1. 对图 1-5 所示的函数$f(x)$，求下列极限，如极限不存在，说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$； (2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$； (3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

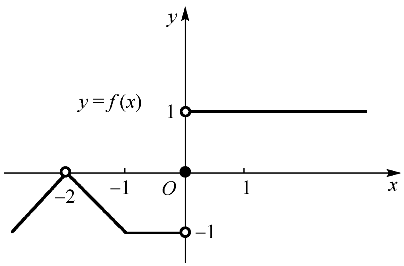


图 1-5

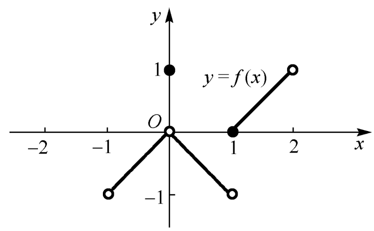


图 1-6

解 (1) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=0$. (2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-1$. (3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在，因为$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$而$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$.

2. 对图 1-6 所示的函数$f(x)$，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的?

(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在； (2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$； (3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$；

(4) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$； (5) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在； (6) 对每个$x_0\in(-1,1)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在.

解 (1) 错，因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在与否跟$f(0)$的值无关.

(2) 对，因为$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$.

(3) 错，因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)$的值与$f(0)$的值无关.

(4) 错，因为$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-1$，但$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，故$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

(5) 对，因为$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$.

(6) 对.

3. 对图 1-7 所示的函数，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的?

(1) $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=1$； (2) $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$不存在； (3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$； (4) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$；

(5) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$； (6) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$； (7) $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=0$； (8) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$.

解 (1)对. (2)对, 因为当$x<-1$时, $f\left(x\right)$无定义. (3)对, 因为$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$. (4)错, 因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$的值与$f(0)$的值无关. (5)对. (6)对. (7)对. (8)错, 因为当$x>2$时, $f(x)$无定义.

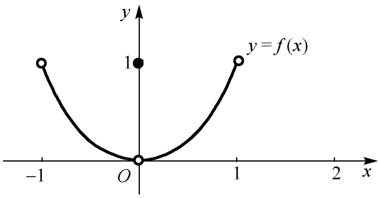


图 1-7

4. 求$f(x)=\dfrac{x}{x}$, $\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$当$x\to 0$时的左、右极限, 说明它们在$x\to 0$时的极限是否存在.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1$.

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$, 所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1.$$

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)$, 所以$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$不存在.

* **5.** 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$;　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$;　(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$;　(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

分析: 对于用定义来证明的极限问题, 一般首先需要对原来的式子做适当的放大, 然后再考虑别的. 应当指出的是, 若极限过程是$x\to x_0$时, 在放大的式子中应当想法保留住$|x-x_0|$的一个因子, 这样可便于利用$|x-x_0|<\delta$来得到$\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon$的结论, 而$\delta$的确定也基于这一点.

解 (1) 由于

$$|3x-1-8|=|3x-9|=3|x-3|,$$

为了使$|3x-1-8|<\varepsilon$, 只需

$$3|x-3|<\varepsilon,\ 即|x-3|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

所以$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, 则当$|x-3|<\delta$, 就有

$$|3x-1-8|<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

(2) 由于

$$|(5x+2)-12|=|5x-10|=5|x-2|,$$

为了使$|(5x+2)-12|<\varepsilon$, 只需

$$5|x-2|<\varepsilon,\ 即|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

所以$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$, 则当$|x-2|<\delta$, 就有

$$\left|(5x+2)-12\right|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

(3) 由于

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=\left|\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}+4\right|=\left|x-2+4\right|=\left|x-(-2)\right|,$$

为了使 $\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$, 只需

$$\left|x-(-2)\right|<\varepsilon.$$

所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $\left|x-(-2)\right|<\delta$ 时, 就有

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(4) 由于

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=\left|\frac{(1+2x)(1-2x)}{2x+1}-2\right|=\left|1-2x-2\right|=\left|2x-1\right|=2\left|x-\frac{1}{2}\right|,$$

为了使 $\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$, 只需

$$2\left|x-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon, \text{ 即 } \left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, 则当 $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta$, 就有

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

* **6.** 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

分析: 对于用定义来证明的极限问题, 一般首先需要对原来的式子做适当的放大. 若极限过程是 $x\to\infty$ 时, 在放大的式子中应当想法保留住 $|x|$, 这样可便于利用 $|x|>X$ 来得到 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 的结论, 而 X 的确定也基于这一点.

解 (1) 由于

$$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2x^3}\right|=\frac{1}{2|x|^3},$$

为了使$\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只需

$$\frac{1}{2|x|^3}<\varepsilon\text{，即}|x|>\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}.$$

所以$\forall\varepsilon>0$，取$X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，则当$|x|>X$，就有

$$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 由于

$$\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-0\right|=\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right|<\frac{1}{\sqrt{x}},$$

为了使$\left|\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，只需

$$\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon\text{，即}x>\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

所以$\forall\varepsilon>0$，取$X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，则当$x>X$，就有

$$\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

* **7.** 当$x\to 2$时，$y=x^2\to 4$．问δ等于多少，使得当$|x-2|<\delta$时，$|y-4|<0.001$？

解　由于$x\to 2$时，$|x-2|\to 0$，因此不妨设$|x-2|<1$，即有$1<x<3$．所以

$$|y-4|=|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|,$$

为了使$|y-4|<\varepsilon$，只需

$$5|x-2|<\varepsilon\text{，即}|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

若取$\varepsilon=0.001$，则当$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}=\dfrac{0.001}{5}=0.0002$时，$|y-4|<\varepsilon$，即取$\delta=0.0002$时，则当$|x-2|<\delta$时，$|y-4|<0.001$.

* **8.** 当$x\to\infty$时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to 1$．问$X$等于多少，使得当$|x|>X$时，$|y-1|<0.01$？

解　由于

$$|y-1|=\left|\frac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\left|\frac{x^2-1-x^2-3}{x^2+3}\right|=\left|\frac{-4}{x^2+3}\right|=\frac{4}{x^2+3}<\frac{4}{x^2},$$

为了使$|y-1|<0.01$，只需

$$\frac{4}{x^2}<0.01\text{，即}|x|>\sqrt{\frac{4}{0.01}}=20.$$

所以可取$X=20$，则当$|x|>\mathrm{X}$，就有$|y-1|<0.01$.

*9. 证明函数$f(x)=|x|$当$x\to 0$时极限为零.

证明 由于

$$|f(x)-0|=||x|-0|=|x|,$$

为了使$|f(x)-0|<\varepsilon$，只需

$$|x|<\varepsilon\text{，即}|x-0|<\varepsilon.$$

所以$\forall\varepsilon>0$，可取$\delta=\varepsilon$，则当$|x-0|<\delta$，就有

$$|f(x)-0|<\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

*10. 证明：若$x\to+\infty$及$x\to-\infty$时，函数$f(x)$的极限都存在且都等于A，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

证明 由于$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，则由函数极限的定义可知，对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists X_1>0$，当$x>X_1$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$；对于同一个$\varepsilon$，也一定$\exists X_2>0$，当$x<-X_2$时，也有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

取$X=\max\{X_1,X_2\}$，则当$|x|>X$时，即$x>X$或$x<-X$，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

*11. 根据函数极限的定义证明：函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证明 下面先证明必要性：

不妨设当$x\to x_0$时，$f(x)\to A$. 则由函数极限的定义可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

由上面的结论可得，当$-\delta<x-x_0<0$即$x_0-\delta<x<x_0$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，从而$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$；且当$0<x-x_0<\delta$即$x_0<x<x_0+\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，从而$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

因此有结论：当$x\to x_0$时，$f(x)$的左极限、右极限各自存在并且相等.

再来证明充分性：

假设$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，则由函数极限的定义可得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当$x_0-\delta_1<x<x_0$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$；并且对于同一个$\varepsilon$，$\exists\delta_2>0$，当$x_0<x<x_0+\delta_2$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，一定有 $x_0-\delta_1<x<x_0$ 和 $x_0<x<x_0+\delta_2$，从而有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

*12. 试给出 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性的定理，并加以证明.

解 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性的定理：如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则存在常数 $M>0$ 及 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则由函数极限的定义得

$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 对于 $\varepsilon=1$，一定存在某 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，$|f(x)-A|<1$，所以

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|.$$

记 $M=1+|A|$，则定理成立.

习题 1-4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

解 两个无穷小的商未必是无穷小，比如 $x\to 0$ 时，x^2、x^3、$\sin^2 x$ 均为无穷小，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^3}=\infty$.

*2. 根据定义证明：

(1) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 为当 $x\to 3$ 时的无穷小； (2) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷小.

证明 (1) 由于

$$|y|=\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|,$$

所以对于 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|y|<\varepsilon$，只需 $|x-3|<\varepsilon$. 取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有

$$|y|=|x-3|<\delta=\varepsilon,$$

所以 $x\to 3$ 时，$y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 为无穷小.

(2) 由于

$$|y|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x-0|,$$

所以对于 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|y|<\varepsilon$，只需 $|x-0|<\varepsilon$. 取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-0|<\delta$ 时，有

$$|y|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x-0|<\delta=\varepsilon,$$

所以 $x\to 0$ 时，$y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 为无穷小.

*3. 根据定义证明: 函数 $y=\dfrac{1+2x}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件, 能使 $|y|>10^4$?

证明 由于

$$|y|=\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|2+\frac{1}{x}\right|\geqslant\frac{1}{|x|}-2,$$

所以对于任意的 $M>0$，要使 $|y|>M$，只需 $\dfrac{1}{|x|}-2>M$，即 $|x|<\dfrac{1}{M+2}$. 因此, 对于任意的 $M>0$，存在 $\delta=\dfrac{1}{M+2}$，只要 x 满足 $|x-0|<\delta$，则有 $|f(x)|>M$，即 $x\to 0$ 时，$f(x)\to\infty$.

当 $M=10^4$ 时，$\delta=\dfrac{1}{M+2}=\dfrac{1}{10^4+2}$，即当 $|x|<\dfrac{1}{10^4+2}$ 时，$|y|>10^4$.

4. 求下列极限并说明理由:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1-x}$.

解 (1) 因为 $\dfrac{2x+1}{x}=2+\dfrac{1}{x}$，并且在 $x\to\infty$ 时 $\dfrac{1}{x}$ 为无穷小, 则由本节定理 1 知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2.$$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1-x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)$，并且在 $x\to 0$ 时 x 为无穷小, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1-x}=1$.

5. 根据函数极限或无穷大定义, 填写下表.

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使得当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使得当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使得当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使得当 $\|x\|>X$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists X>0$，使得当 $\|x\|>X$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists X>0$，使得当 $\|x\|>X$ 时，即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$，使得当 $\|x\|>X$ 时，即有 $f(x)<-M$
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使得当 $x>X$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists X>0$，使得当 $x>X$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists X>0$，使得当 $x>X$ 时，即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$，使得当 $x>X$ 时，即有 $f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使得当 $x>-X$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists X>0$，使得当 $x<-X$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists X>0$，使得当 $x<-X$ 时，即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$，使得当 $x<-X$ 时，即有 $f(x)<-M$

6. 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界? 这个函数是否为 $x\to+\infty$ 时的无穷大? 为什么?

解 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的, 这是因为对于任意给定的 $M>0$，在 $(-\infty,+\infty)$

内总能找到这样的 x，使得 $|y(x)|>M$．例如

$$y(2k\pi)=2k\pi\cos 2k\pi=2k\pi \quad (k=0,1,2,3,\cdots)$$

只要 k 充分大，就有 $y(2k\pi)>M$．

当 $x\to+\infty$ 时，函数 $y=x\cos x$ 也不是无穷大，这是因为对于任意给定的 $M>0$，找不到一个 N，使得当 $x>N$ 时，恒有 $|y(x)|>M$．例如，

$$y\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad (k=0,1,2,3,\cdots).$$

因此不管给定怎样的 N，只要 k 充分大，总有 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}>N$，但 $|y(x)|=0<M$．

*7. 证明函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 内无界，但该函数不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

证明　函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 内无界，因为对于任意的 $M>0$，在 $(0,1]$ 上总能找到点 x_k，使得 $|y(x_k)|>M$．例如，

$$x_k=\frac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}} \quad (k=0,1,2,3,\cdots),$$

只要 k 充分大，总能使得 $y(x_k)=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$．

当 $x\to0^+$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 也不是无穷大. 因为对于任意的 $M>0$，对于所有的 $\delta>0$，总可以找到这样的点 x_k，使得 $0<x_k<\delta$，但 $y(x)<M$．例如，

$$x_k=\frac{1}{2k\pi} \quad (k=0,1,2,3,\cdots),$$

只要 k 充分大时，就会有 $x_k<\delta$，但 $y(x)=2k\pi\sin(2k\pi)=0<M$．

注：对于本题所涉及的问题，我们有下面的定理.

定理 1　$y=f(x)$ 在区间 I 上无界的充分必要条件是：存在数列 $\{x_n\}\subset I$，使得 $y_n=f(x_n)\to\infty$.

定理 2　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（$A$ 是有限数或 ∞）$\Leftrightarrow$ 对于任意数列 $\{x_n\}$，$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

8. 求函数 $f(x)=\dfrac{4}{2-x^2}$ 的图形的渐近线.

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{2-x^2}=0$，所以 $y=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{4}{2-x^2}$ 图形的水平渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to+\sqrt{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to+\sqrt{2}}\dfrac{4}{2-x^2}=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}}\dfrac{4}{2-x^2}=\infty$，故 $x=+\sqrt{2}$ 及 $x=-\sqrt{2}$ 都是函数 $f(x)=\dfrac{4}{2-x^2}$ 的图形的铅直渐近线.

习题 1-5

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$;　(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$;　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;　(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$;　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$;　(9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$;　(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$;　(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$;

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$;　(14) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\dfrac{9}{-1}=-9$.

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^2-3)}{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^2+1)}=\dfrac{0}{4}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(4x^2-2x+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(2x+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=2$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{2}$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{x^4}+\dfrac{x}{x^4}}{1-3\dfrac{x^2}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-3\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{0}{1}=0$.

(9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{2}{3}$.

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=1\cdot 2=2$.

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)=2\left(1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)=2$.

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)=\frac{1}{5}.$$

(14) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=\frac{-3}{3}=-1.$$

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=\dfrac{0}{16}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}=\infty$.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{(2x^3-x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{0}{2}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$.

3. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 (1) 因为$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$ 并且 $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，所以由有界函数与无穷小的乘积是无穷小，得

$\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(2) 因为 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$ 并且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以由有界函数与无穷小的乘积是无穷小，得

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$.

4. 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$. 下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) $a_n<b_n$，$n\in\mathbf{N}_+$; (2) $b_n<c_n$，$n\in\mathbf{N}_+$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

解 (1)错. 例如 $a_n=\frac{n+1}{n^2}$, $b_n=\frac{n}{n+1}$, $n\in\mathbf{N}_+$. 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, 但当 $n=1$ 时, $a_1=2>\frac{1}{2}=b_1$, 因此对于 $\forall n\in\mathbf{N}_+$, $a_n<b_n$ 不成立.

(2)错. 例如 $b_n=\frac{n}{n+1}$, $c_n=(-1)^n n$, $n\in\mathbf{N}_+$. 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$, 但当 n 为奇数时, $b_n>c_n$, 因此对于 $\forall n\in\mathbf{N}_+$, $b_n<c_n$ 不成立.

(3)错. 例如 $a_n=\frac{1}{n}$, $c_n=n$, $n\in\mathbf{N}_+$. 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$.

(4)对. 因为假设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 存在, 则由于 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1\neq0$, 即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}$ 存在, 从而可得

$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_nc_n)\cdot\frac{1}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(b_nc_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}$ 极限存在, 这与 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 矛盾.

5. 下列陈述中, 哪些是对的, 哪些是错的? 如果是对的, 说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在, 那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$ 不存在;

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都不存在, 那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$ 不存在;

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在, 那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)$ 不存在.

解 (1)对, 因为若 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$ 存在, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 也存在, 这与已知条件矛盾.

(2)错. 例如分段函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-1, & x\geqslant0\\ 1, & x<0\end{cases}$. 显然 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 都不存在, 但是 $\lim\limits_{x\to0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$.

(3)错. 例如 $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$. 显然有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 不存在, 但是 $\lim\limits_{x\to0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=1$.

***6**. 证明本节定理 3 中的(2).

定理 3 (2)如果 $\lim f(x)=A$, $\lim g\left(x\right)=B$, 那么

$$\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B.$$

证明 因为 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 则由上节定理 1 可得存在无穷小 α 和 β, 使得

$$f(x)=A+\alpha,\quad g(x)=B+\beta,$$

从而有

$$f(x)\cdot g(x)=(A+\alpha)\cdot(B+\beta)=AB+A\beta+B\alpha+\alpha\beta.$$

又由本节定理 2 的推论可得 $A\beta$,$B\alpha$,$\alpha\beta$ 均为无穷小, 由本节定理 1 知 $A\beta+B\alpha+\alpha\beta$ 也为无穷小. 因此

$$\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=A\cdot B=\lim f(x)\cdot\lim g(x).$$

习题 1-6

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{x}$;　(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\sin5x}$;　(4) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$;　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于零的常数）.

解 (1) 当 $\omega\neq0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{\omega x}\cdot\omega=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{\omega x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\omega=1\cdot\omega=\omega$;

当 $\omega=0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x}=0=\omega$，即不论 ω 为何值，均有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{x}=\omega$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{x}=3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{3x}=3$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\sin5x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin2x}{2x}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\sin5x}{5x}}\cdot\dfrac{2x}{5x}\right)=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin5x}{5x}}=\dfrac{2}{5}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos x=1\cdot1=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=2$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x=1\cdot x=x$.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$;　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$;　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$（$k$ 为正整数）.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\left(-\frac{1}{x}\right)(-1)}=\left[\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\left(-\frac{1}{x}\right)}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot2}=\left[\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2=\mathrm{e}^2$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x\cdot2}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^2=\mathrm{e}^2$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{(-x)\cdot(-k)}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-k}=\mathrm{e}^{-k}$.

*__3__. 根据函数极限的定义，证明极限存在的准则 I′.

准则 I′ 如果

(1) 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, r)$（或 $|x| > M$）时，$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$，$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$；

那么 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在，且等于 A.

证明 以 $x \to x_0$ 为例.

因为 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，所以由函数极限的定义可得,对于 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta_1 > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，恒有 $|g(x) - A| < \varepsilon$，即

$$A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon . \tag{a}$$

又 $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，对于上面的 $\varepsilon > 0$，$\exists \delta_2 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，恒有 $|h(x) - A| < \varepsilon$，即

$$A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon . \tag{b}$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，前面的条件(1)和关系式(a)、(b)同时成立，从而有

$$A - \varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < A + \varepsilon ,$$

即 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则由函数极限的定义有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A .$$

注：对于 $x \to \infty$ 的情况可类似证明.

4. 利用极限存在准则证明:

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} = 1$； (2) $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\dfrac{1}{n^2 + \pi} + \dfrac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \dfrac{1}{n^2 + n\pi}\right) = 1$；

(3) 数列 $\sqrt{2}$，$\sqrt{2 + \sqrt{2}}$，$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$，$\cdots$ 的极限存在;

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[n]{1 + x} = 1$； (5) $\lim\limits_{x \to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 1$.

证明 (1) 因为 $1 \leqslant \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} 1 = 1$，$\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$，故由夹逼准则得

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} = 1$.

(2) 因为 $\dfrac{n^2}{n^2 + n\pi} \leqslant n\left(\dfrac{1}{n^2 + \pi} + \dfrac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \dfrac{1}{n^2 + n\pi}\right) \leqslant \dfrac{n^2}{n^2 + \pi}$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2}{n^2 + n\pi} = 1$，

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2}{n^2 + \pi} = 1$，所以由夹逼准则得

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi}\right) = 1 .$$

(3) 本题利用数列单调有界准则证明.

记 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$，$x_1 = \sqrt{2}$.

a. 首先利用归纳法证明数列的有界性:

当 $n=1$ 时，$x_1=\sqrt{2}<2$；不妨假定 $x_k<2$，则当 $n=k+1$ 时，有

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2,$$

即 $x_n<2\,(n\in N^+)$.

b. 再证数列是单调递增的:

因为 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\dfrac{2+x_n-{x_n}^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=-\dfrac{(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n}\quad(n\in N^+)$，由 $0<x_n<2$，得 $x_{n+1}-x_n>0\ \ (n\in N^+)$，即数列是单调递增的.

综上结论 a、b 可得，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

由关系式 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，得 ${x_{n+1}}^2=2+x_n$. 对上式两端同时取极限，可得

$$\lim_{n\to\infty}{x_{n+1}}^2=\lim_{n\to\infty}(2+x_n),$$

从而得

$$a^2=2+a\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow(a-2)(a+1)=0,$$

解得 $a_1=2$，$a_2=-1<0$（舍弃）. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

(4) 当 $x>0$ 时，$1<\sqrt[n]{1+x}<1+x$；当 $-1<x<0$ 时，$1>\sqrt[n]{1+x}>1+x$. 且 $\lim\limits_{x\to0}1=1$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1$，所以由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[n]{1+x}=1$.

(5) 当 $x>0$ 时，$1-x<x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant1$. 而 $\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}1=1$. 由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

习题 1-7

1. 当 $x\to0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，哪一个是高阶无穷小?

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x^2}{2-x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}(x-x^2)}{\lim\limits_{x\to0}(2-x)}=\dfrac{0}{2}=0$，所以当 $x\to0$ 时，x^2-x^3 是 $2x-x^2$ 的高阶无穷小.

2. 当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 与 $\sin^2 x$ 相比，哪一个是高阶无穷小?

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^2}{x^2}=0$，故当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 是 $\sin^2 x$ 的高阶无穷小.

3. 当 $x\to1$ 时，无穷小 $1-x$ 和(1) $1-x^3$，(2) $\dfrac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶? 是否等价?

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1+x+x^2}=\dfrac{1}{3}$，所以当 $x\to1$ 时，$1-x$ 和 $1-x^3$ 是同阶无穷小，但非等价无穷小.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\dfrac{1}{2}(1-x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\dfrac{1}{2}(1-x)(1+x)}=2\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+x}=1$，故当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 和 $\dfrac{1}{2}(1-x^2)$ 是同阶无穷小，并且也是等价无穷小.

4. 证明：当 $x\to 0$ 时，有

(1) $\arctan x\sim x$；　　(2) $\sec x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$.

证明　(1) 令 $\arctan x=t$，即 $x=\tan t$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$. 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=1,$$

即当 $x\to 0$ 时，$\arctan x\sim x$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec x-1}{\dfrac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}-1}{\dfrac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{\dfrac{x^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1$，所以当 $x\to 0$ 时，$\sec x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$.

5. 利用等价无穷小的性质，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$（$n$、$m$ 为正整数）；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0, & n>m\\ 1, & n=m\\ \infty, & n<m\end{cases}$（$n$、$m$ 为正整数）.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\sec x)}{\dfrac{1}{3}x^2\cdot\dfrac{1}{2}\sin x}=6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec x}{x^2}$

$=6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=6\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-3$.

6. 证明无穷小的等价关系具有下列性质：

(1) $\alpha\sim\alpha$（自反性）；(2) 若 $\alpha\sim\beta$，则 $\beta\sim\alpha$（对称性）；

(3) 若 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$（传递性）.

证明 (1) 因为 $\lim \dfrac{\alpha}{\alpha}=1$，所以 $\alpha \sim \alpha$.

(2) 因为 $\alpha \sim \beta$，所以 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=1$，从而 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$，即 $\beta \sim \alpha$.

(3) 因为 $\alpha \sim \beta$，$\beta \sim \gamma$，故 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=1$ 且 $\lim \dfrac{\beta}{\gamma}=1$，从而有 $\lim \dfrac{\alpha}{\gamma}=\lim \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\beta}{\gamma}=\lim \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot \lim \dfrac{\beta}{\gamma}=1$，

即 $\alpha \sim \gamma$.

习题 1-8

1. 设 $y=f(x)$ 的图形如图 1-8 所示，试指出 $f(x)$ 的全部间断点，并对可去间断点补充或修改函数值的定义，使它成为连续点.

解 由图 1-8 可知，函数 $f(x)$ 在点 $x=-1, 0, 2, 3$ 无定义，而在点 $x=1$，有 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2\neq f(1)=1$，故 $x=-1, 0, 1, 2, 3$ 均为函数 $f(x)$ 的间断点. 其中 $x=0$ 为跳跃间断点，$x=-1, 1, 2, 3$ 为可去间断点.

对于 $x=-1, 2, 3$，可分别补充定义：$f(-1)=0$，$f(2)=0$，$f(3)=0$，使得它们成为连续点. 而对于点 $x=1$，则可修改其定义 $f(1)=2$，使得 $x=1$ 也成为连续点.

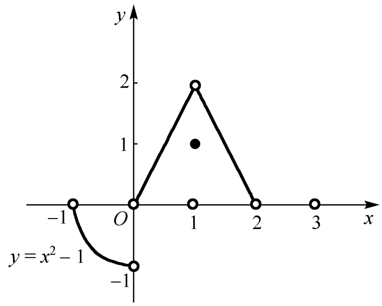


图 1-8

2. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形：

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2; \end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases} x, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ 1, & x<-1 \text{ 或 } x>1. \end{cases}$

解 (1) 由函数的定义可见，$f(x)$ 在 $[0,1)$ 和 $(1.2]$ 这两个区间内都是连续的.

在点 $x=1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$，$f(1)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，从而函数 $f(x)$ 在定义区间 $[0, 2]$ 上是连续的. 函数图形如图 1-9 所示.

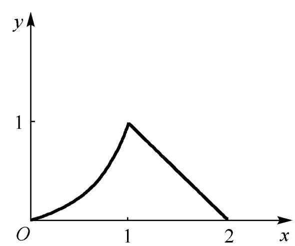


图 1-9

(2) 由函数定义可见，$f(x)$ 在定义区间 $(-\infty, -1)$、$(-1,1)$、$(1, +\infty)$ 上都是连续的.

在点 $x=-1$ 处，$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} 1=1$，

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x=-1$，$f(-1)=-1$，即

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x) \text{ 且 } \lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1),$$

所以 $x=-1$ 是跳跃间断点，但在此点是右连续.

在点 $x=1$ 处，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1$，

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1$，$f(1)=1$，即

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1),$$

所以 $x=1$ 是连续点. 函数图形如图 1-10 所示.

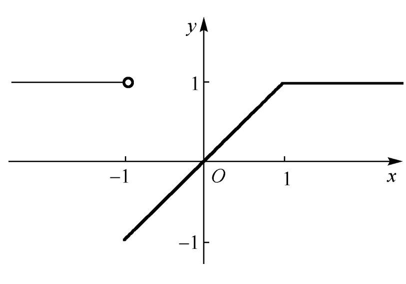


图 1-10

3. 下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续.

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$，$x=1$，$x=2$；

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x}$，$x=k\pi$，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$，$x=0$；　　　　(4) $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ 3-x, & x>1,\end{cases}$ $x=1$.

解 (1) 对于 $x=1$，函数在此点无定义且有

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-2}=-2,$$

因此 $x=1$ 为第一类间断点中的可去间断点. 重新定义函数

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, & x\neq1,2\\ -2, & x=1\end{cases}$$

则函数 $f_1(x)$ 在 $x=1$ 点连续.

对于 $x=2$，函数在此点无定义,又有

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x-2}=\infty,$$

所以 $x=2$ 为第二类无穷间断点.

(2) 对于 $x=0$，因为函数在 $x=0$ 点无定义且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=1$，所以 $x=0$ 为第一类间断点中的可去间断点. 可重新定义函数

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, & x\neq k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\neq0,k\in Z),\\ 1, & x=0\end{cases}$$

则函数 $f_1(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

对于 $x=k\pi$ $(k\neq0,k\in Z)$，因为 $\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty$，所以 $x=k\pi$ $(k\neq0,k\in Z)$ 为第二类无穷间断点.

对于 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，因为函数在这些点无定义并且 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0$，所以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第一类间断点中的可去间断点. 可重新定义函数

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, & x\neq k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\ (k\in Z),$$

则函数 $f_2(x)$ 在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 点处连续.

(3) 对于 $x=0$，因为函数在 $x=0$ 点无定义且 $\lim\limits_{x\to0^+}\cos^2\dfrac{1}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to0^-}\cos^2\dfrac{1}{x}$ 均不存在，所以 $x=0$ 点为第二类间断点且为振荡间断点.

(4) 对于 $x=1$，因为 $f(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}(3-x)=2$，$f(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$，即 $f(1^+)$ 和 $f(1^-)$ 都存在但 $f(1^+)\neq f(1^-)$，所以 $x=1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点.

4. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判别其类型.

解　首先需要确定函数 $f(x)$ 的表达式，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}x, & |x|<1\\ 0, & x=1\\ -x, & |x|>1\end{cases}.$$

对于分段点 $x=-1$，因为 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(-x)=1$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1$，即 $f(-1^+)$ 和 $f(-1^-)$ 都存在但 $f(-1^+)\neq f(-1^-)$，所以 $x=-1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点.

对于分段点 $x=1$，因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-x)=-1$，即 $f(1^+)$ 和 $f(1^-)$ 都存在但 $f(1^+)\neq f(1^-)$，所以 $x=1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点.

5. 下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 a 连续，那么 $|f(x)|$ 也在 a 连续；

(2) 如果函数 $|f(x)|$ 在 a 连续，那么 $f(x)$ 也在 a 连续.

解　(1)对. 因为

$$\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|\to0\ \ (x\to a),$$

所以 $|f(x)|$ 在 a 点也连续.

(2)错. 例如

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\geqslant0\\ -1, & x<0\end{cases},$$

显然函数 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 点连续，但 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

***6.** 证明：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0)\neq0$，则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\neq0$.

证明　由已知条件知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\neq0$.

若 $f(x_0)>0$，则由函数极限的局部保号性得：存在 $\delta_1>0$，使得当 $x\in U(x_0,\delta_1)$ 时，有 $f(x)>0$. 同理，若 $f(x_0)<0$，则存在 $\delta_2>0$，使得当 $x\in U(x_0,\delta_2)$ 时，有 $f(x)<0$. 即不管是 $f(x_0)>0$ 还是 $f(x_0)<0$，总存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，使得当 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\neq0$.

* **7.** 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in Q \\ 0, & x\in R\setminus Q \end{cases},$$

证明: (1) $f(x)$ 在 $x=0$ 连续; (2) $f(x)$ 在非零的 x 处都不连续.

证明 (1) 可由函数在一点连续的定义证明, 即证 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

因为 $|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leqslant|x|$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$, 只需 $|x|<\varepsilon$.

不妨取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $|x|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

(2) 只需证: 对于 $\forall x_0\neq 0$, $f(x)$ 在 x_0 点不连续.

若 $x_0=r\neq 0$, $r\in Q$, 则 $f(x_0)=f(r)=r$.

分别取一有理数列 $\{r_n\}$: $r_n\to r$ $(n\to\infty)$, $r_n\neq r$; 取一无理数列 $\{s_n\}$: $s_n\to r$ ($n\to\infty$), $r_n\neq r$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}r_n=r,$$

$$\lim_{n\to\infty}f(s_n)=\lim_{n\to\infty}0=0,$$

但 $r\neq 0$, 由函数极限与数列极限的关系知道 $\lim\limits_{x\to r}f(x)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在 r 处不连续.

若 $x_0=s$, $s\in R\setminus Q$. 同理可证得 $f(x_0)=f(s)=0$, 但 $\lim\limits_{x\to s}f(x)$, 因此 $f(x)$ 在 s 处不连续. 即 $f(x)$ 在非零的 x 处都不连续.

* **8.** 设举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子:

$x=0$, ± 1, ± 2, $\pm\dfrac{1}{2}$, $\cdots$, $\pm n$, $\pm\dfrac{1}{n}$, $\cdots$ 是 $f(x)$ 的所有间断点, 且它们都是无穷间断点.

解 令 $f(x)=\cot(\pi x)+\cot\dfrac{\pi}{x}$, 则 $f(x)$ 满足上述要求.

习题 1-9

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间, 并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解 因为函数 $f(x)$ 在 $x=-3$ 和 $x=2$ 点处无定义, 因此 $x=-3$ 和 $x=2$ 是 $f(x)$ 的间断点, 且函数在其他点处连续, 得 $f(x)$ 的连续区间 $(-\infty,-3)$, $(-3,2)$, $(2,+\infty)$.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to -3}f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2(x+3)-(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-1)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-1}{x-2}=-\frac{8}{5},$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2(x+3)-(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x^2-1)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-2}=\infty.$$

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续, 证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),\ g(x)\},\quad \psi(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}$$

在点 x_0 也连续.

证明 $$\varphi(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}=\frac{1}{2}\big[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\big],$$

$$\psi(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}=\frac{1}{2}\big[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\big].$$

又因为若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $|f(x)|$ 也在 x_0 点连续，且连续函数的和、差仍连续，因此 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 x_0 点也连续.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$；　(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$；　(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$；　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+5)}=\sqrt{5}$.

(2) $$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3=\left(\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\sin 2\alpha\right)^3=\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^3=1\cdot$$

(3) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=\ln[\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\cos 2x)]=\ln(2\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos 2x)=\ln\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)=\ln 1=0\cdot$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

(5) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=\frac{4}{2}=2\cdot$$

(6) $$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{2\sin\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2}}{2\cdot\frac{x-\alpha}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin\frac{x-\alpha}{2}}{\frac{x-\alpha}{2}}\cdot\lim_{x\to\alpha}\cos\frac{x+\alpha}{2}=1\cdot\cos\alpha=\cos\alpha\cdot$$

(7) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x\cdot x}=-\dfrac{1}{3}$.

4. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$; (5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}}\dfrac{\ln x-1}{x-\mathrm{e}}$; (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+1}{\sqrt[3]{(1-x))(1+x)}-1}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^0=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)=\ln 1=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{1}{2}}=\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\frac{1}{3}\cot^2 x\cdot 3}=\left\{\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\frac{1}{3\tan^2 x}}\right\}^3=\mathrm{e}^3$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}=\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}}\right\}^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}\right)}$

$$=\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}}\right\}^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-3x+3}{2x+12}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}.$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\left(\sqrt{1+\sin^2 x}-1\right)\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sec x-1)}{x\left(\sqrt{1+\sin^2 x}-1\right)\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sec x-1}{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=1\cdot 1\cdot \frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(7) 令 $x-\mathrm{e}=t$，当 $x\to \mathrm{e}$ 时，$t\to 0$，从而

$$\lim_{x\to \mathrm{e}}\frac{\ln x-1}{x-\mathrm{e}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+\mathrm{e})-\ln \mathrm{e}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{\mathrm{e}}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{\mathrm{e}}}{t}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(8) $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{x}-1)-(\mathrm{e}^{x}-1)}{\sqrt[3]{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)(\mathrm{e}^{x}-1)}{\frac{1}{3}(-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{-\frac{1}{3}x^2}=-6.$$

5. 设 $f(x)$ 在 R 上连续，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 在 R 上有定义，且有间断点，则下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点；　　(2) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点；

(3) $f[\varphi(x)]$ 未必有间断点；　　(4) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

解　(1)错. 例如：取 $\varphi(x)=\operatorname{sgn}x$，$f(x)=\mathrm{e}^{x}$，则它们满足条件，但 $\varphi[f(x)]\equiv 1$ 在 R 上处处连续.

(2)错. 例如：$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ -1, & x\in Q^C\end{cases}$，但 $[\varphi(x)]^2\equiv 1$ 在 R 上处处连续.

(3)对. 如取 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ -1, & x\in Q^C\end{cases}$，$f(x)=|x|+1$，则 $f[\varphi(x)]\equiv 2$ 在 R 上处处连续.

(4)对. 假设 $F(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 R 上处处连续，则由连续函数的乘积仍为连续函数得，$\varphi(x)=F(x)\cdot f(x)$ 也在 R 上处处连续，这与已知条件矛盾.

6. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

应当怎样选择数 a，使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数？

解　易知 $f(x)$ 在定义区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内都是连续的，因此要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，只需选择适当的数 a，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续即可.

因为 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+x)=a$，$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{x}=1$ 且 $f(0)=a$，所以要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，只需 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)$，即 $a=1$.

习题 1-10

1. 假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，并且对 $[0,1]$ 上的任意一点 x 有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 试证明 $[0,1]$ 中必存在一点 c，使得 $f(c)=c$（c 称为函数 $f(x)$ 的不动点）.

证明　设 $F(x)=f(x)-x$，则由已知条件知 $F(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=f(0)-0\geqslant 0$，$F(1)=f(1)-1\leqslant 0$.

若 $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$，即 $f(0)=0$ 或 $f(1)=1$，则 $x=0$ 或 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的不动点；

若 $F(0)$ 和 $F(1)$ 均不为零，则必定有 $F(0)\cdot F(1)<0$，则由零点定理知，至少存在一点 $c\in(0,1)$，

使得 $F(c)=0$，即 $f(c)=c$.

综上所述，对于函数 $f(x)$，在 $[0,1]$ 中必存在一点 c，使得 $f(c)=c$.

2. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于1和2之间.

证明 设 $F(x)=x^5-3x-1$，则函数 $F(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续，且 $F(1)=-3<0$，$F(2)=32>0$. 则由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(1,2)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $\xi^5-3\xi=1$. 即 ξ 为方程 $x^5-3x=1$ 的满足条件的根.

3. 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0,b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

证明 设 $F(x)=a\sin x+b-x$，则 $F\left(x\right)$ 在区间 $[0,a+b]$ 上连续，且 $F(0)=b>0$，

$$F(a+b)=a\sin(a+b)+b-(a+b)=a\sin(a+b)-a\leqslant 0 .$$

若 $\sin(a+b)=1$，则 $F(a+b)=0$，从而有 $x=a+b$ 即是方程 $x=a\sin x+b$ 满足条件的正根;

若 $\sin(a+b)\neq 1$，则 $F(a+b)<0$，从而 $F(0)\cdot F(a+b)<0$，由零点定理得，至少存在一点 $\xi\in(0,a+b)$ 使得 $F(\xi)=0$，即 ξ 为方程 $x=a\sin x+b$ 的不超过 $a+b$ 的正根.

综上所述，方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

4. 证明任一最高次幂的指数为奇数的代数方程

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

至少有一个实根，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{2n+1}$ 均为常数，$n\in N$.

证明 设 $f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=x^{2n+1}\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\cdots+\dfrac{a_{2n}}{x^{2n}}+\dfrac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)$，显然 $f(x)$ 为初等函数且在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，若 $a_0>0$，则

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty ,$$

从而必存在 $X_1<X_2$，使得 $f(X_1)<0$ 且 $f(X_2)>0$，因此有 $f(x)$ 在 $[X_1,X_2]$ 上满足零点定理，则在开区间 $(X_1\ X_2)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即方程

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

至少有一个实根. 若 $a_0<0$，同理可证.

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b\ (n\geqslant 3)$，则在 (x_1,x_n) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，而 $[x_1,x_n]\subset[a,b]$，所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续.

设 $M=\max\left\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\right\}$，$m=\min\left\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\right\}$，则

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M .$$

若上式中两端的不等号不成立，即 $m<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}<M$，则由介值定理的推论得，在 (x_1,x_n) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

若上述不等式中的等号成立，不妨设 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=M$,则有 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=M$. 在 $x_2,x_3,\cdots,x_{n-1}$ 中任取一个作为 ξ，则有

$$\xi\in(x_1,x_n)\,,\ f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

若有 $m=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$ 成立，类似地可得结论.

综上所述，在 (x_1,x_n) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

* **6.** 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $\left[a,b\right]$ 上的任意两点 x 和 y，恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，其中 L 为正常数，且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证明：至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f\left(\xi\right)=0$.

证明 $\forall x_0\in(a,b)$，在 x 点给自变量一增量 Δx，则相应的函数值将产生一增量:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

则由已知条件得当 $\Delta x\to 0$ 时,

$$0\leqslant|\Delta y|=|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|\leqslant L|\Delta x|\to 0.$$

可见 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，从而由连续的定义得 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 再根据点 x_0 的任意性得，$f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续.

若 $x_0=a$ 或 $x_0=b$,$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$，则当 $0<x-a<\delta$ 或 $-\delta<x-b<0$ 时，有 $|f(x)-f(b)|<L|x-b|<\varepsilon$，即函数 $f(x)$ 在点 $x_0=a$ 右连续，在点 $x_0=b$ 左连续.

综上可知，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

又已知 $f(a)\cdot f(b)<0$，则由零点定理知：至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

* **7.** 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证明 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则由函数极限的定义，给定 $\varepsilon=1>0$，存在 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<1,$$

即当 $|x|>X$ 时，$|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|$.

又 $f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续，则由闭区间上连续函数的有界性定理知：$\exists M>0$，对于 $\forall x\in[-X,X]$，有 $|f(x)|<M$.

取 $M'=\max\left\{M,1+|A|\right\}$，则对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|f(x)|<M'$，也即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

* **8.** 在什么条件下，(a,b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续?

解 若 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 都存在，并且设

$$F(x)=\begin{cases}f(a^+), & x=a\\ f(x), & x\in(a,b)\\ f(b^-), & x=b\end{cases}$$

则容易证得 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 又由函数的一致连续性定理得 $F\left(x\right)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 从而有 $F(x)$ 在 (a,b) 内一致连续, 即 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

总 习 题 一

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内.

(1) 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的____________条件. 数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的____________条件.

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的____________条件. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的____________条件.

(3) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 的____________条件. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的____________条件.

(4) $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限 $f(x_0^+)$ 及左极限 $f(x_0^-)$ 都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ 存在的_____条件.

解 (1) 必要, 充分. (2) 必要, 充分. (3) 必要, 充分. (4) 充分必要.

2. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-x^2}, & 0<|x|<\dfrac{\pi}{2}\\ a\ , & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$________.

解 由函数在一点连续的定义得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$. 即有

$$a=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-x^2}=1^0=1.$$

3. 选择以下两题中给出的四个结论中一个正确的结论.

(1) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$, 则当 $x\to 0$ 时, 有(　　).

A. $f(x)$ 与 x 是等价无穷小　　B. $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小

C. $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小　　D. $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

(2) 设

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1},$$

则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 第二类间断点　　D. 连续点

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln 2}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln 3}{x}=\ln 2+\ln 3=\ln 6\neq 1$, 所以 $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小, 故应选择 B.

(2) $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=1-\dfrac{2}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，而 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，所以

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(1-\frac{2}{e^{\frac{1}{x}}+1}\right)=1,$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(1-\frac{2}{e^{\frac{1}{x}}+1}\right)=1-2=-1,$$

即 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$ 都存在，但 $f(0^+)\neq f(0^-)$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，应选择 B.

4. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求下列函数的定义域.

(1) $f(e^x)$；　(2) $f(\ln x)$；　(3) $f(\arctan x)$；　(4) $f(\cos x)$.

解 (1) 因为 $0\leqslant e^x\leqslant1\Leftrightarrow x\leqslant0$，所以 $f(e^x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

(2) 因为 $0\leqslant\ln x\leqslant1\Leftrightarrow1\leqslant x\leqslant e$，所以 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1,e]$.

(3) 因为 $0\leqslant\arctan x\leqslant1\Leftrightarrow0\leqslant x\leqslant\tan1$，所以 $f(\arctan x)$ 的定义域为 $[0,\tan1]$.

(4) 因为 $0\leqslant\cos x\leqslant1\Leftrightarrow2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$，故 $f(\cos x)$ 的定义域为

$$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right],\quad k\in Z.$$

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant0,\\ x, & x>0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$$

求 $f[f(x)]$，$g[g(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 因为 $f[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant0\\ f(x), & f(x)>0\end{cases}$ 且由函数的表达式知 $f(x)\geqslant0$，$x\in R$，所以

$f[f(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant0\\ x, & x>0\end{cases}$，即 $f[f(x)]=f(x),x\in R$.

因为 $g[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant0\\ -[g(x)]^2, & g(x)>0\end{cases}$ 且由函数的表达式知 $g(x)\leqslant0$，$x\in R$，所以 $g[g(x)]=0$，$x\in R$.

因为 $f[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant0\\ g(x), & g(x)>0\end{cases}$ 而 $g(x)\leqslant0$，$x\in R$，所以 $f[g(x)]=0$，$x\in R$.

因为 $g[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant0\\ -[f(x)]^2, & f(x)>0\end{cases}$ 而 $f(x)\geqslant0$，$x\in R$，所以 $g[f(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant0\\ -x^2, & x>0\end{cases}$，即 $g[f(x)]=g(x),x\in R$.

6. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形.

(1) $y=|\sin x|$;　　(2) $y=\sin|x|$;　　(3) $y=2\sin\frac{x}{2}$.

解　(1) $y=|\sin x|$ 的图形可将 $\sin x<0$ 的部分作关于横轴 $y=0$ 的对称图形，而其余部分不变得到，详图略.

(2) $y=\sin|x|$ 的图形可将 $x>0$ 时的函数图形保持不变，且整个图形关于纵轴 $x=0$ 对称得到，详图略.

(3) $y=2\sin\frac{x}{2}$ 的图形可将振幅扩大为 2，且周期扩大为 4π 得到，详图略.

7. 把半径为 R 的一圆形铁皮，自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试建立该圆锥的体积 V 与角 α 间的函数关系.

解　设围成的圆锥底圆半径为 r，高为 h. 依题意知 $2\pi r=2\pi R-\alpha R$，得

$$r=\frac{2\pi R-\alpha R}{2\pi}\text{，所以 } h=\sqrt{R^2-\left(\frac{2\pi R-\alpha R}{2\pi}\right)^2}.$$

则圆锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\pi R-\alpha R}{2\pi}\right)^2\cdot\sqrt{R^2-\left(\frac{2\pi R-\alpha R}{2\pi}\right)^2}$$
$$=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\cdot\sqrt{4\pi^2\alpha-\alpha^2}\quad(0<\alpha<2\pi).$$

* **8**. 根据函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

证明　因为 $\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|=\left|\frac{x^2-x-6-5x+15}{x-3}\right|=\left|\frac{x^2-6x+9}{x-3}\right|=|x-3|$，所以对于 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon$，只需 $|x-3|<\varepsilon$ 即可.

不妨取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，恒有

$$\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

9. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$;　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;　(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\ (a>0,\ b>0,\ c>0)$;　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}(a>0)$;　(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2-x+1}=0$，所以由无穷小与无穷大的关系可得 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}=\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\cdot\frac{1}{x}}$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\cdot\frac{1}{x}}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-1}{x}+\dfrac{b^x-1}{x}+\dfrac{c^x-1}{x}\right)$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\ln a}{x}+\frac{x\ln b}{x}+\frac{x\ln c}{x}\right)=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)$$

$$=\frac{1}{3}\ln abc=\ln\sqrt[3]{abc}$$

所以原极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$.

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot(\sin x-1)\cdot\tan x}=\left\{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}}\right\}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\cdot\tan x}$.

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}}=\mathrm{e}$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\cdot\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\sin x$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}}{2\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}}\cdot\sin x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\sin x=0,$$

所以原极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\mathrm{e}^0=1$.

(7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}(a>0)$；令 $x-a=t$，当 $x\to a$ 时，$t\to 0$，从而

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(a+t)-\ln a}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{t}{a}\right)}{\dfrac{t}{a}}\cdot\frac{1}{a}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t}{a}}{\dfrac{t}{a}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-\dfrac{1}{2}x^2}=-2$.

10. 设

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ a+x^2, & x\leqslant 0\end{cases},$$

要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，应当怎样选择数 a？

解　由函数 $f(x)$ 的表达式知：$f(x)$ 在定义区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内都是连续的，因此要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，只需选择适当的数 a，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

因为 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0$（无穷小与有界函数的乘积任为无穷小），

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(a+x^2)=a,\ f(0)=a,$$

所以要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，只需 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)$，即 $a=0$.

11. 设

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}},$$

求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点所属类型.

解　要求函数 $f(x)$ 的间断点需要先确定 $f(x)$ 的表达式.

当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x$；

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1}{1+1}=1$；

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-1}{1+1}=0$；

当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=0$，所以函数 $f(x)$ 的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1\text{ or }x>1\\ 1+x, & -1<x<1\\ 1, & x=1\end{cases}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，所以 $x=1$ 为第一类间断点.

12. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1 .$$

证明 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\cdot n\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot n ,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1 ,$$

所以，由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

13. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

证明 不妨设 $f(x)=\sin x+x+1$，可见 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，且

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+1=-\frac{\pi}{2}<0 ,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+1=\frac{\pi}{2}+2>0 ,$$

即 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，所以由零点定理可得：在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$. 即对于方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

14. 如果存在直线 L：$y=kx+b$，使得当 $x\to\infty$ （或 $x\to+\infty$， $x\to-\infty$ ）时，曲线 $y=f(x)$ 上的动点 $M(x,y)$ 到直线 L 的距离 $d(M,L)\to 0$，则称 L 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线. 当直线 L 的斜率 $k\neq 0$ 时，称 L 为斜渐近线.
(1) 证明：直线 L：$y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线的充分必要条件是

$$k=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\begin{smallmatrix}x\to+\infty\\ x\to-\infty\end{smallmatrix}\right)}}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\begin{smallmatrix}x\to+\infty\\ x\to-\infty\end{smallmatrix}\right)}}\left[f(x)-kx\right].$$

(2) 求曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

解 (1) 以 $x\to\infty$ 的情况为例，其他情况类似.
必要性:
设直线 L：$y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线，则曲线 $y=f(x)$ 上的动点 $M(x,y)$ 到直线 L 的距离为 $d(M,L)\to 0$ （当 $x\to\infty$ 时），有

$$d(M,L)=\frac{\left|kx+b-f\left(x\right)\right|}{\sqrt{k^2+1}}\to 0,$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$，从而有

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]+b=0+b=b;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x}\left[f(x)-kx\right]+k\right\}=0+k=k.$$

充分性:

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$,即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$ 可得 $d(M,L)\to 0$ （当 $x\to\infty$ 时），即直线 L: $y=kx+b$ 为曲线 $y=f\left(x\right)$ 的渐近线.

(2) 因为 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x-1\right)}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=2$,

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(2x-1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}2x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1\overset{u=\frac{1}{x}}{=}2\lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{e}^{u}-1}{u}-1=2\ln\mathrm{e}-1=1,$$

所以，曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为 $y=2x+1$.

第 2 章

导数与微分

一、基 本 内 容

1. 导数的概念

    (1) 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的导数;

    (2) 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数;

    (3) 函数 $y = f(x)$ 在开区间 I 内可导.

2. 导数的几何意义

3. 导数的物理意义

4. 函数的可导性与连续性之间的关系

    (1) 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导, 则函数在该点必连续;

    (2) 函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件, 但不是充分条件.

5. 基本求导公式（常数和基本初等函数的导数）

6. 基本求导法则

    (1) 函数的和、差、积、商的求导法则;

    (2) 反函数的求导法则;

    (3) 复合函数的求导法则.

7. 高阶导数

8. 隐函数及由参数方程所确定的函数的微分法

9. 微分的概念

    (1) 函数在某点可微的定义;

    (2) 函数在某点的微分与导数的关系;

    (3) 函数在某点的改变量 Δy 与微分 $\mathrm{d}y$ 的关系;

    (4) 函数在某区间内可微的定义.

10. 基本微分公式（常数和基本初等函数的微分）

11. 基本微分法则

    (1) 函数的和、差、积、商的微分法则;

    (2) 复合函数的微分法则.

12. 函数在某点微分的几何意义

13. 微分的应用

    (1) 近似计算;

    *(2) 误差估计.

二、基本要求

1. 理解导数的概念，理解导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量，理解函数的可导性与连续性之间的关系.
2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式.
3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数.
4. 会求分段函数的导数，会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.
5. 理解微分的概念，理解导数与微分的关系.
6. 了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分.
7. 理解微分在近似计算中的应用.

三、习题解答

习题 2-1

1. 设物体绕定轴旋转，在时间间隔 $[0,t]$ 内转过角度 θ，从而转角 θ 是 t 的函数：$\theta=\theta(t)$. 如果旋转是匀速的，那么称 $\omega=\dfrac{\theta}{t}$ 为该物体旋转的角速度. 如果旋转是非均匀的，应怎样确定该物体在时刻 t_0 的角速度?

解 当时间由 t_0 变为 $t_0+\Delta t$ 时，物体旋转的转角相应地由 $\theta(t_0)$ 变为 $\theta(t_0+\Delta t)$，这段时间内物体旋转的平均角速度为

$$\frac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t},$$

如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}$$

存在，此极限称为物体在时刻 t_0 的角速度，即物体在时刻 t_0 的角速度为 $\theta'(t_0)$.

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时，物体就不断冷却. 若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$，应怎样确定该物体在时刻 t 的冷却速度?

解 当时间由 t 变为 $t+\Delta t$ 时，物体的温度相应地由 $T(t)$ 变为 $T(t+\Delta t)$，这段时间内物体的平均冷却速度为

$$\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t},$$

如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}$$

存在，此极限称为物体在时刻 t 的冷却速度，即物体在时刻 t 的冷却速度为 $T'(t)$.

3. 设某工厂生产 x 件产品的成本为 $C(x)=2000+100x-0.1x^2$（元），函数 $C(x)$ 称为成本函数，成本函数 $C(x)$ 的导数 $C'(x)$ 在经济学中称为边际成本. 试求:

(1) 当生产100件产品时的边际成本;

(2) 生产第101件产品时的成本，并与(1)中求得的边际成本做比较，说明边际成本的实际意义.

解 (1) 边际成本为

$$C'(x)=100-0.2x.$$

生产100件产品时的边际成本为

$$C'(100)=100-0.2\cdot 100=80 \text{（元/件）}.$$

(2) 生产第101件产品时的成本为

$$C(101)-C(100)=(2000+100\cdot 101-0.1\cdot 101^2)-(2000+100\cdot 100-0.1\cdot 100^2)=79.9 \text{（元）}.$$

边际成本的实际意义：生产 x 件产品时的边际成本，可以解析为生产 x 件产品后，再生产一件产品的成本.

4. 设 $f(x)=10x^2$，试按定义求 $f'(-1)$.

解 由导数的定义得

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{10x^2-10\cdot(-1)^2}{x+1}=\lim_{x\to -1}10(x-1)=-20.$$

5. 证明 $(\cos x)'=-\sin x$.

证明 令 $f(x)=\cos x$，则

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(\dfrac{x+\Delta x+x}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{x+\Delta x-x}{2}\right)}{\Delta x}\\&=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}}=-\sin x\end{aligned},$$

即 $(\cos x)'=-\sin x$.

6. 下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在，按照导数定义观察下列极限，指出 A 表示什么.

(1) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，其中 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在;

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$.

解 (1) $\displaystyle A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-1)\cdot\frac{f\left[x_0+(-\Delta x)\right]-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

(2) $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.

(3) $A=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f[x_0+(-h)]-f(x_0)}{-h}\right\}$$

$$=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)$$

以下两题中给出了四个结论，从中选择一个正确的结论.

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, x\leqslant 1,\\ x^2,\quad x>1.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的(　　).

A. 左、右导数都存在　　B. 左导数存在，右导数不存在

C. 左导数不存在，右导数存在　　D. 左、右导数都不存在

解　B.

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{3}(x^2+x+1)=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty .$$

8. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)\left(1+|\sin x|\right)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的(　　).

A. 充分必要条件　　B. 充分条件但非必要条件

C. 必要条件但非充分条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

解　A.

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)-f(0),$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)+f(0),$$

$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件为 $F'_+(0)=F'_-(0)$，即 $f(0)=0$.

9. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^4$； (2) $y=\sqrt[3]{x^2}$； (3) $y=x^{1.6}$； (4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；

(5) $y=\dfrac{1}{x^2}$； (6) $y=x^3\cdot\sqrt[5]{x}$； (7) $y=\dfrac{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$.

解 (1) $y'=4x^3$.

(2) $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$.

当 $x\neq 0$ 时，$y'=\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$； 当 $x=0$ 时，$y'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=\infty$.

函数在 $x=0$ 处不可导.

(3) $y'=1.6x^{0.6}$.

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$，$y'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

(5) $y=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$，$y'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}$.

(6) $y=x^3\cdot\sqrt[5]{x}=x^{\frac{16}{5}}$，$y'=\dfrac{16}{5}x^{\frac{16}{5}-1}=\dfrac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$.

(7) $y=\dfrac{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}=x^{\frac{1}{6}}$，$y'=\dfrac{1}{6}x^{\frac{1}{6}-1}=\dfrac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.

10. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$ m，求该物体在 $t=2$ s 时的速度.

解 $s'=3t^2$，物体在 $t=2$ s 时的速度为 $s'|_{t=2}=3\times 2^2=12$ m/s.

11. 如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明 $f'(0)=0$.

解 因为

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x},$$

$f(x)$ 为偶函数，$f(\Delta x)=f(-\Delta x)$，

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{f\left[0+(-\Delta x)\right]-f(0)}{-\Delta x}=-f'(0),$$

所以 $f'(0)=0$.

12. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率：$x=\dfrac{2}{3}\pi$；$x=\pi$.

解 因为 $y'=\cos x$，所以切线的斜率分别为

$$y'|_{x=\frac{2}{3}\pi}=\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}；\quad y'|_{x=\pi}=\cos\pi=-1.$$

13. 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

解 因为 $y' = -\sin x$，所以切线斜率为 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因而切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + y - \dfrac{1}{6}\left(3 + \sqrt{3}\pi\right) = 0$. 法线斜率为 $-\dfrac{1}{y'\big|_{x=\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$，法线方程为

$$y - \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

即 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x - y + \dfrac{1}{18}(9 - 4\sqrt{3}\pi) = 0$.

14. 求曲线 $y = e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

解 因为 $y' = e^x$，所以切线斜率为 $y'\big|_{x=0} = 1$，因而切线方程为 $y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$，即

$$x - y + 1 = 0.$$

15. 在抛物线 $y = x^2$ 上取横坐标为 $x_1 = 1$ 及 $x_2 = 3$ 的两点，作过这两点的割线. 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?

解 $y' = 2x$, $y\big|_{x=1} = 1$, $y\big|_{x=3} = 9$，由题意得

$$2x = \frac{9-1}{3-1},$$

所以 $x = 2$. 又 $y\big|_{x=2} = 4$，因而所求点坐标为 $(2,4)$.

16. 讨论下列函数在 $x = 0$ 处的连续性与可导性.

(1) $y = |\sin x|$； (2) $y = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

解 (1)令 $y = f(x)$，则

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x} = -1,$$

$$f_+'(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

因为 $f'_+(0) \neq f_-'(0)$，所以函数在 $x = 0$ 处不可导；又

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-}(-\sin x) = 0,$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+}(\sin x) = 0,$$

$$f(0^-) = f(0^+) = f(0),$$

所以函数在 $x = 0$ 处连续.

(2) 令 $y = f(x)$，则

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$. 故函数在 $x = 0$ 处可导，因而连续.

17. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1.\end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a 和 b 应取什么值?

解 $f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$，$f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$，由函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，得

$$f(1^-)=f(1^+)=f(1),$$

即 $a+b=1$．又

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(ax+b)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(ax+b)-(a+b)}{x-1}=a,$$

由函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，得

$$f'_-(1)=f'_+(1),$$

即 $a=2$，所以 $b=-1$．

18. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ 求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$，又 $f'(0)$ 是否存在?

解 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$，

由于 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，因而 $f'(0)$ 不存在.

19. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$．

解 当 $x<0$ 时，$f(x)=\sin x$，$f'(x)=\cos x$，当 $x>0$ 时，$f(x)=x$，$f'(x)=1$．

当 $x=0$ 时，

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$f'_+(0)=f'_-(0),$$

所以 $f'(0)=1$．因而 $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

20. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$．

证明 $y'=-\dfrac{a^2}{x^2}$，$y'\big|_{x=x_0}=-\dfrac{a^2}{x_0^2}$．

双曲线 $xy=a^2$ 上任一点 x_0 处的切线方程为

$$y-\frac{a^2}{x_0}=-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0).$$

当 $y=0$ 时，$x=2x_0$；当 $x=0$ 时，$y=\frac{2a^2}{x_0}$. 即切线在两坐标轴上的截距分别为 $2x_0$，$\frac{2a^2}{x_0}$.

因而切线与两坐标轴构成的三角形的面积为 $S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot|2x_0|\cdot\left|\frac{2a^2}{x_0}\right|=2a^2$.

习题 2-2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式：$(\cot x)'=-\csc^2 x$，$(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

解 $(\cot x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{(-\sin x)\sin x-\cos x(\cos x)}{\sin^2 x}$

$=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$,

即 $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

$$(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=\frac{(1)'\sin x-1\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{0\cdot\sin x-\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=-\csc x\cot x,$$

即 $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

2. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^3+\frac{7}{x^4}-\frac{2}{x}+12$； (2) $y=5x^3-2^x+3e^x$； (3) $y=2\tan x+\sec x-1$；

(4) $y=\sin x\cdot\cos x$； (5) $y=x^2\ln x$； (6) $y=3e^x\cos x$； (7) $y=\frac{\ln x}{x}$；

(8) $y=\frac{e^x}{x^2}+\ln 3$； (9) $y=x^2\ln x\cos x$； (10) $s=\frac{1+\sin t}{1+\cos t}$.

解 (1) $y'=(x^3)'+(7x^{-4})'-(2x^{-1})'+(12)'=3x^2+7(-4)x^{-5}-2(-1)x^{-2}+0=3x^2-\frac{28}{x^5}+\frac{2}{x^2}$.

(2) $y'=(5x^3)'-(2^x)'+(3e^x)'=5\cdot3x^2-2^x\ln 2+3e^x=15x^2-2^x\ln 2+3e^x$.

(3) $y'=(2\tan x)'+(\sec x)'-(1)'=2\sec^2 x+\sec x\tan x-0=\sec x(2\sec x+\tan x)$.

(4) $y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)=\cos 2x$.

(5) $y'=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(1+2\ln x)$.

(6) $y'=(3e^x)'\cos x+3e^x(\cos x)'=3e^x\cos x+3e^x(-\sin x)=3e^x(\cos x-\sin x)$.

(7) $y'=(x^{-1}\ln x)'=(x^{-1})'\ln x+x^{-1}(\ln x)'=-x^{-2}\ln x+x^{-1}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

(8) $y'=(x^{-2}e^x+\ln 3)'=(x^{-2})'e^x+x^{-2}(e^x)'+(\ln 3)'=-2x^{-3}e^x+x^{-2}e^x+0=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$.

(9) $y'=(x^2\ln x)'\cos x+x^2\ln x(\cos x)'=[(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)']\cos x+x^2\ln x(-\sin x)$

$$=\left(2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}\right)\cos x-x^2\ln x\sin x=(2x\ln x+x)\cos x-x^2\ln x\sin x.$$

(10) $$s'=\frac{(1+\sin t)'(1+\cos t)-(1+\sin t)(1+\cos t)'}{(1+\cos t)^2}=\frac{(0+\cos t)(1+\cos t)-(1+\sin t)(0-\sin t)}{(1+\cos t)^2}$$

$$=\frac{\cos t+\sin t+1}{(1+\cos t)^2}.$$

3. 求下列函数在给定点处的导数.

(1) $y=\sin x-\cos x$, 求 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}$;

(2) $\rho=\theta\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$, 求 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$;

(3) $f(x)=\frac{3}{5-x}+\frac{x^2}{5}$, 求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

解 (1) $y'=(\sin x)'-(\cos x)'=\cos x+\sin x$, $y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$;

$$y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}.$$

(2) $$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=(\theta\sin\theta)'+\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)'=(\theta)'\sin\theta+\theta(\sin\theta)'+\frac{1}{2}(-\sin\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta+\theta\cos\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{8}(2+\pi).$$

(3) $$f'(x)=\frac{(3)'(5-x)-3(5-x)'}{(5-x)^2}+\frac{1}{5}(x^2)'=\frac{0\cdot(5-x)-3(0-1)}{(5-x)^2}+\frac{1}{5}\cdot 2x=\frac{3}{(5-x)^2}+\frac{2x}{5},$$

$$f'(0)=\frac{3}{(5-0)^2}+\frac{2\cdot 0}{5}=\frac{3}{25};\quad f'(2)=\frac{3}{(5-2)^2}+\frac{2\cdot 2}{5}=\frac{17}{15}.$$

4. 以初速度 v_0 竖直上抛的物体, 其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$. 求:

(1) 该物体的速度 $v(t)$; (2) 该物体达到最高点的时刻.

解 (1) $v(t)=s'=(v_0t)'-\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=v_0\cdot 1-\frac{1}{2}g\cdot 2t=v_0-gt$.

(2) 设 t_0 时刻物体达到最高点, 则 $v(t_0)=0$, 即 $v_0-gt_0=0$, 所以 $t_0=\frac{v_0}{g}$.

5. 求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

解 $y'=(2\sin x)'+(x^2)'=2\cos x+2x=2(\cos x+x)$.

所求切线斜率为 $k_1=y'\big|_{x=0}=2(\cos 0+0)=2$, 又 $y\big|_{x=0}=2\sin 0+0^2=0$, 所以切点为 $(0,0)$, 所求切线方程为 $y-0=2(x-0)$, 即 $2x-y=0$. 所求法线斜率为 $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2}$, 所求法线方

程为

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-0),$$

即 $x+2y=0$.

6. 求下列函数的导数.

(1) $y=(2x+5)^4$; (2) $y=\cos(4-3x)$; (3) $y=\mathrm{e}^{-3x^2}$; (4) $y=\ln(1+x^2)$;

(5) $y=\sin^2 x$; (6) $y=\sqrt{a^2-x^2}$; (7) $y=\tan x^2$;

(8) $y=\arctan(\mathrm{e}^x)$; (9) $y=(\arcsin x)^2$; (10) $y=\ln\cos x$.

解 (1) $y'=4(2x+5)^3\cdot(2x+5)'=4(2x+5)^3\cdot(2+0)=8(2x+5)^3$.

(2) $y'=-\sin(4-3x)\cdot(4-3x)'=-\sin(4-3x)\cdot(0-3)=3\sin(4-3x)$.

(3) $y'=\mathrm{e}^{-3x^2}\cdot(-3x^2)'=\mathrm{e}^{-3x^2}\cdot(-3\cdot 2x)=-6x\mathrm{e}^{-3x^2}$.

(4) $y'=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot(0+2x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

(5) $y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

(6) $y'=[(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}]'=\dfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(a^2-x^2)'=\dfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(0-2x)=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(7) $y'=\sec^2 x^2\cdot(x^2)'=\sec^2 x^2\cdot(2x)=2x\sec^2 x^2$.

(8) $y'=\dfrac{1}{1+(\mathrm{e}^x)^2}\cdot(\mathrm{e}^x)'=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\cdot\mathrm{e}^x=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$.

(9) $y'=2\arcsin x\cdot(\arcsin x)'=2\arcsin x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(10) $y'=\dfrac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=\dfrac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=-\tan x$.

7. 求下列函数的导数.

(1) $y=\arcsin(1-2x)$; (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (3) $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$; (4) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$;

(5) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$; (6) $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$; (7) $y=\arcsin\sqrt{x}$; (8) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

(9) $y=\ln(\sec x+\tan x)$; (10) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(1-2x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(0-2)=-\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

(2) $y'=[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}]'=-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1-x^2)'=-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(0-2x)=\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $y'=(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})'\cos 3x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x)'=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(-\dfrac{x}{2}\right)'\cos 3x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(-\sin 3x)(3x)'$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x+6\sin 3x).$$

(4) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (-x^{-2}) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

(5) $y' = \dfrac{(1-\ln x)'(1+\ln x)-(1-\ln x)(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2} = \dfrac{\left(0-\dfrac{1}{x}\right)(1+\ln x)-(1-\ln x)\left(0+\dfrac{1}{x}\right)}{(1+\ln x)^2}$

$= -\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

(6) $y' = \dfrac{(\sin 2x)' x - \sin 2x (x)'}{x^2} = \dfrac{\cos 2x (2x)' x - \sin 2x}{x^2} = \dfrac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2}$.

(7) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \left(\dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

(8) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot (x+\sqrt{a^2+x^2})' = \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \left[1+\dfrac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}(a^2+x^2)'\right]$

$= \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \left[1+\dfrac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}(0+2x)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

(9) $y' = \dfrac{1}{\sec x + \tan x} \cdot (\sec x + \tan x)' = \dfrac{1}{\sec x + \tan x} \cdot (\sec x \tan x + \sec^2 x) = \sec x$.

(10) $y' = \dfrac{1}{\csc x - \cot x} \cdot \left(\csc x - \cot x\right)' = \dfrac{1}{\csc x - \cot x} \cdot \left[-\csc x \cot x - (-\csc x)^2\right] = \csc x$.

8. 求下列函数的导数.

(1) $y = \left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$; (2) $y = \ln\tan\dfrac{x}{2}$; (3) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$; (4) $y = \mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}$;

(5) $y = \sin^n x \cos nx$; (6) $y = \arctan\dfrac{x+1}{x-1}$; (7) $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$; (8) $y = \ln\ln\ln x$;

(9) $y = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$; (10) $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解 (1) $y' = 2\arcsin\dfrac{x}{2} \cdot \left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)' = 2\arcsin\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)'$

$= 2\arcsin\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\arcsin\dfrac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$.

(2) $y' = \dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}} \cdot \left(\tan\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}} \cdot \sec^2\dfrac{x}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}} \cdot \sec^2\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{\sin x} = \csc x$.

(3) $y' = \dfrac{1}{2}(1+\ln^2 x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+\ln^2 x)' = \dfrac{1}{2}(1+\ln^2 x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[0+2\ln x(\ln x)'\right]$

$$=\frac{1}{2}(1+\ln^2 x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$$

(4) $y'=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}\cdot(\arctan\sqrt{x})'=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})'=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

(5) $y'=(\sin^n x)'\cos nx+\sin^n x(\cos nx)'=n\sin^{n-1}x\cdot(\sin x)'\cos nx+\sin^n x(-\sin nx)\cdot(nx)'$

$$=n\sin^{n-1}x\cdot\cos x\cos nx+\sin^n x(-\sin nx)\cdot n=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x.$$

(6) $y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)}\cdot\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$$=\frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)}\cdot\frac{(1+0)(x-1)-(x+1)(1-0)}{(x-1)^2}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

(7) $y'=\frac{(\arcsin x)'\arccos x-\arcsin x(\arccos x)'}{(\arccos x)^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x-\arcsin x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\arccos x)^2}$

$$=\frac{\arccos x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}.$$

(8) $y'=\frac{1}{\ln\ln x}\cdot(\ln\ln x)'=\frac{1}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'=\frac{1}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x(\ln x)\ln(\ln x)}$.

(9) $y'=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})'(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})'}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}$

$$=\frac{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot(1+x)'-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot(1-x)'\right](\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$-\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot(1+x)'+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot(1-x)'\right]}{2(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot(0+1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot(0-1)\right](\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$-\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot(0+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot(0-1)\right]}{2(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}.$$

或

$$y'=\left[\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}\right]'=\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)'$$

$$=\frac{(1-\sqrt{1-x^2})'x-(1-\sqrt{1-x^2})(x)'}{x^2}=\frac{\left[0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)'\right]x-(1-\sqrt{1-x^2})\cdot 1}{x^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(0-2x)x-1+\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

(10) $$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'=\sqrt{\frac{1+x}{2x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'$$

$$=\frac{|1+x|}{2\sqrt{2x(1-x)}}\cdot\frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}=\frac{|1+x|}{2\sqrt{2x(1-x)}}\cdot\frac{(0-1)(1+x)-(1-x)(0+1)}{(1+x)^2}$$

$$=-\frac{1}{|1+x|\sqrt{2x(1-x)}}=-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$，试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

解 $$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot\left[f^2(x)+g^2(x)\right]'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot\left[2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)\right]=\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$$

10. 设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$： (1) $y=f(x^2)$；(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

解 (1) $\frac{dy}{dx}=f'(x^2)\cdot(x^2)'=2xf'(x^2)$.

(2) $$\frac{dy}{dx}=f'(\sin^2 x)\cdot(\sin^2 x)'+f'(\cos^2 x)\cdot(\cos^2 x)'$$

$$=f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)'+f'(\cos^2 x)\cdot 2\cos x\cdot(\cos x)'$$

$$=f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cdot\cos x+f'(\cos^2 x)\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)$$

$$=\sin 2x\left[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)\right].$$

11. 求下列函数的导数.

(1) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$； (2) $y=\sin^2 x\cdot\sin(x^2)$； (3) $y=\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2$； (4) $y=\frac{\ln x}{x^n}$；

(5) $y=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$； (6) $y=\ln\cos\frac{1}{x}$； (7) $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$；

(8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$； (9) $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$； (10) $y=\arcsin\frac{2t}{1+t^2}$.

解 (1) $y'=(e^{-x})'(x^2-2x+3)+e^{-x}(x^2-2x+3)'$

$$=\mathrm{e}^{-x}(-x)'(x^2-2x+3)+\mathrm{e}^{-x}(2x-2+0)$$
$$=\mathrm{e}^{-x}(-1)(x^2-2x+3)+\mathrm{e}^{-x}(2x-2)$$
$$=(-x^2+4x-5)\mathrm{e}^{-x}.$$

(2) $y'=(\sin^2 x)'\sin(x^2)+\sin^2 x\cdot\left[\sin(x^2)\right]'$

$$=2\sin x(\sin x)'\sin(x^2)+\sin^2 x\cdot\cos(x^2)\cdot(x^2)'$$
$$=2\sin x\cos x\sin(x^2)+\sin^2 x\cdot\cos(x^2)\cdot 2x$$
$$=\sin 2x\cdot\sin(x^2)+2x\sin^2 x\cdot\cos(x^2).$$

(3) $y'=2\arctan\dfrac{x}{2}\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)'=2\arctan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)'$

$$=2\arctan\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{4+x^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{4+x^2}\cdot\arctan\frac{x}{2}.$$

(4) $y'=(x^{-n}\ln x)'=(x^{-n})'\ln x+x^{-n}(\ln x)'=-nx^{-n-1}\ln x+x^{-n}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}.$

(5) $y'=\dfrac{(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})'(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})-(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})'}{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^2}$

$$=\frac{[\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}(-t)'](\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})-(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})[\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}(-t)']}{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^2}$$
$$=\frac{[\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}(-1)](\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})-(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})[\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}(-1)]}{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^2}=\frac{4}{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^2}.$$

或 $y'=(\mathrm{th}t)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}.$

(6) $y'=\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{x}}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{x}}\cdot\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\tan\dfrac{1}{x}\cdot(-x^{-2})=\dfrac{1}{x^2}\cdot\tan\dfrac{1}{x}.$

(7) $y'=\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}}\left(-\sin^2\dfrac{1}{x}\right)'=\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-2\sin\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)'$

$$=\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-2\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-2\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})$$
$$=\frac{1}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{2}{x}.$$

(8) $y'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot(x+\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}.$

(9) $y'=(x)'\arcsin\dfrac{x}{2}+x\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)'+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\cdot(4-x^2)'$

$$=\arcsin\frac{x}{2}+x\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}}\left(\frac{x}{2}\right)'+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\cdot(0-2x)$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}.$$

(10) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)' = \frac{1+t^2}{\left|1-t^2\right|}\cdot 2\cdot\frac{(t)'(1+t^2)-t(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{1+t^2}{\left|1-t^2\right|}\cdot 2\cdot\frac{(1+t^2)-t(0+2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{\left|1-t^2\right|}\cdot\frac{2}{1+t^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{1+t^2}, & |t|<1, \\ -\dfrac{2}{1+t^2}, & |t|>1. \end{cases}$$

* **12.** 求下列函数的导数.

(1) $y = \mathrm{ch}(\mathrm{sh}x)$; (2) $y = \mathrm{sh}x\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{ch}x}$; (3) $y = \mathrm{th}(\ln x)$; (4) $y = \mathrm{sh}^3 x + \mathrm{ch}^2 x$;

(5) $y = \mathrm{th}(1-x^2)$; (6) $y = \mathrm{arsh}(x^2+1)$; (7) $y = \mathrm{arch}(\mathrm{e}^{2x})$; (8) $y = \arctan(\mathrm{th}x)$;

(9) $y = \ln \mathrm{ch}x + \dfrac{1}{2\mathrm{ch}^2 x}$; (10) $y = \mathrm{ch}^2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

解 (1) $y' = \mathrm{sh}(\mathrm{sh}x)\cdot(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{sh}(\mathrm{sh}x)\cdot \mathrm{ch}x$.

(2) $$y' = (\mathrm{sh}x)'\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{ch}x} + \mathrm{sh}x\cdot(\mathrm{e}^{\mathrm{ch}x})' = \mathrm{ch}x\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{ch}x} + \mathrm{sh}x\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{ch}x}\cdot(\mathrm{ch}x)'$$
$$= \mathrm{ch}x\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{ch}x} + \mathrm{sh}x\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{ch}x}\cdot \mathrm{sh}x = \mathrm{e}^{\mathrm{ch}x}(\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}^2 x).$$

(3) $$y' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(\ln x)}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(\ln x)}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\mathrm{ch}^2(\ln x)}.$$

(4) $$y' = 3\mathrm{sh}^2 x\cdot(\mathrm{sh}x)' + 2\mathrm{ch}x\cdot(\mathrm{ch}x)' = 3\mathrm{sh}^2 x\cdot \mathrm{ch}x + 2\mathrm{ch}x\cdot \mathrm{sh}x = \frac{1}{2}\mathrm{sh}2x\cdot(3\mathrm{sh}x+2).$$

(5) $$y' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}\cdot(1-x^2)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}\cdot(0-2x) = -\frac{2x}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}.$$

(6) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1+(1+x^2)^2}}\cdot(1+x^2)' = \frac{1}{\sqrt{1+(1+x^2)^2}}\cdot(0+2x) = \frac{2x}{\sqrt{2+2x^2+x^4}}.$$

(7) $$y' = \frac{1}{\sqrt{(\mathrm{e}^{2x})^2-1}}\cdot(\mathrm{e}^{2x})' = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1}}\cdot \mathrm{e}^{2x}\cdot(2x)' = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1}}\cdot \mathrm{e}^{2x}\cdot 2 = \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1}}.$$

(8) $$y' = \frac{1}{1+(\mathrm{th}x)^2}\cdot(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{1+(\mathrm{th}x)^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x+\mathrm{sh}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}2x}.$$

(9) $$y' = \frac{1}{\mathrm{ch}x}\cdot(\mathrm{ch}x)' + \frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot \mathrm{ch}^{-3}x\cdot(\mathrm{ch}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}x}\cdot \mathrm{sh}x - \mathrm{ch}^{-3}x\cdot \mathrm{sh}x = \mathrm{th}x\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right) = \mathrm{th}^3 x.$$

(10) $$y' = 2\mathrm{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left[\mathrm{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]' = 2\mathrm{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot \mathrm{sh}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$$

$$= \mathrm{sh}\left(2\cdot\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \mathrm{sh}\left(2\cdot\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{(1-0)(x+1)-(x-1)(1+0)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2}\cdot \mathrm{sh}\left(2\cdot\frac{x-1}{x+1}\right).$$

13. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 的某一邻域内有定义，$f(x)$ 在 x_0 处可导，$f(x_0)=0$，$g(x)$ 在 x_0 处连续，试讨论 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处的可导性.

解 令 $F(x)=f(x)g(x)$，则

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)=f'(x_0)\cdot g(x_0)$$

即函数 $f(x)g(x)$ 在 x_0 点可导.

14. 设函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) $f(x+y)=f(x)f(y)$，对一切 $x,y\in R$；

(2) $f(x)=1+xg(x)$，而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$.

试证明 $f(x)$ 在 R 上处处可导，且 $f'(x)=f(x)$.

证明 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

由(1)知 $f(x+\Delta x)=f(x)f(\Delta x)$，所以

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x},$$

由(2)知，$f(\Delta x)=1+\Delta xg(\Delta x)$，因而

$$f'(x)=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta xg(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}g(\Delta x),$$

由(2)知，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}g\left(\Delta x\right)=1$，所以 $f'(x)=f(x)\cdot 1=f(x)$.

习题 2-3

1. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y=2x^2+\ln x$； (2) $y=\mathrm{e}^{2x-1}$； (3) $y=x\cos x$； (4) $y=\mathrm{e}^{-t}\sin t$；

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$； (6) $y=\ln(1-x^2)$； (7) $y=\tan x$； (8) $y=\dfrac{1}{x^3+1}$；

(9) $y=(1+x^2)\arctan x$； (10) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$； (11) $y=x\mathrm{e}^{x^2}$； (12) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $y'=2\cdot 2x+\dfrac{1}{x}=4x+\dfrac{1}{x}$，$y''=4+(-x^{-2})=4-\dfrac{1}{x^2}$.

(2) $y'=\mathrm{e}^{2x-1}(2x-1)'=2\mathrm{e}^{2x-1}$，$y''=2\cdot\mathrm{e}^{2x-1}(2x-1)'=4\mathrm{e}^{2x-1}$.

(3) $y'=(x)'\cos x+x(\cos x)'=\cos x-x\sin x$，

$$y''=-\sin x-[(x)'\sin x+x(\sin x)']=-\sin x-(\sin x+x\cos x)=-2\sin x-x\cos x.$$

(4) $y'=(\mathrm{e}^{-t})'\sin t+\mathrm{e}^{-t}(\sin t)'=-\mathrm{e}^{-t}\sin t+\mathrm{e}^{-t}\cos t=\mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)$，

$$y''=(\mathrm{e}^{-t})'(\cos t-\sin t)+\mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)'$$

$$=-\mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)+\mathrm{e}^{-t}(-\sin t-\cos t)=-2\mathrm{e}^{-t}\cos t.$$

(5) $y'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(a^2-x^2)'=\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(0-2x)=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

$$y''=-\frac{(x)'\sqrt{a^2-x^2}-x(\sqrt{a^2-x^2})'}{(\sqrt{a^2-x^2})^2}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(a^2-x^2)'}{a^2-x^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}-\dfrac{x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(0-2x)}{a^2-x^2}=-\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

(6) $y'=\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(1-x^2)'=\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(0-2x)=-\dfrac{2x}{1-x^2}$,

$$y''=-2\cdot\frac{(x)'(1-x^2)-x(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=-2\cdot\frac{(1-x^2)-x(0-2x)}{(1-x^2)^2}=-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

(7) $y'=\sec^2 x$, $y''=2\sec x(\sec x)'=2\sec x\cdot\sec x\tan x=2\sec^2 x\tan x$.

(8) $y'=-1\cdot(x^3+1)^{-2}\cdot(x^3+1)'=-1\cdot(x^3+1)^{-2}\cdot(3x^2+0)=-3x^2(x^3+1)^{-2}$,

$$y''=-3\left\{(x^2)'(x^3+1)^{-2}+x^2\left[(x^3+1)^{-2}\right]'\right\}=-3\left\{2x(x^3+1)^{-2}+x^2\left[-2(x^3+1)^{-3}(x^3+1)'\right]\right\}$$

$$=-3\left[2x(x^3+1)^{-2}-2x^2(x^3+1)^{-3}(3x^2+0)\right]=\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}.$$

(9) $y'=(1+x^2)'\arctan x+(1+x^2)(\arctan x)'=(0+2x)\arctan x+(1+x^2)\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=1+2x\arctan x$,

$$y''=(1)'+(2x)'\arctan x+2x\cdot(\arctan x)'=2\arctan x+2x\cdot\frac{1}{1+x^2}=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}.$$

(10) $y'=(x^{-1})'\mathrm{e}^x+x^{-1}(\mathrm{e}^x)'=(-x^{-2})\mathrm{e}^x+x^{-1}\mathrm{e}^x=(x^{-1}-x^{-2})\mathrm{e}^x$,

$$y''=(x^{-1}-x^{-2})'\mathrm{e}^x+(x^{-1}-x^{-2})(\mathrm{e}^x)'=\left[-x^{-2}-(-2x^{-3})\right]\mathrm{e}^x+(x^{-1}-x^{-2})\mathrm{e}^x=\frac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

(11) $y'=(x)'\mathrm{e}^{x^2}+x(\mathrm{e}^{x^2})'=\mathrm{e}^{x^2}+x\mathrm{e}^{x^2}(x^2)'=\mathrm{e}^{x^2}+x\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x=\mathrm{e}^{x^2}(1+2x^2)$,

$$y''=(1+2x^2)'\mathrm{e}^{x^2}+(1+2x^2)(\mathrm{e}^{x^2})'=(0+4x)\mathrm{e}^{x^2}+(1+2x^2)\cdot\mathrm{e}^{x^2}\cdot(x^2)'$$

$$=4x\mathrm{e}^{x^2}+(1+2x^2)\cdot\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x=2x(3+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}.$$

(12) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left[1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'\right]$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(0+2x)\right]=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y''=-\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1+x^2)'=-\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(0+2x)=-\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

2. 设 $f(x)=(x+10)^6$，求 $f'''(2)$.

解　$f'(x)=6(x+10)^5(x+10)'=6(x+10)^5$，$f''(x)=6\cdot5(x+10)^4(x+10)'=30(x+10)^4$，

$$f'''(x)=30\cdot 4(x+10)^3(x+10)'=120(x+10)^3,\ \ f'''(2)=120(2+10)^3=207360.$$

3. 设 $f''(x)$ 存在，求下列函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$: (1) $y=f(x^2)$; (2) $y=\ln\left[f(x)\right]$.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x^2)\cdot(x^2)'=2xf'(x^2)$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2[1\cdot f'(x^2)+x\cdot f''(x^2)\cdot(x^2)']=2[f'(x^2)+x\cdot f''(x^2)\cdot 2x]=2[f'(x^2)+2x^2\cdot f''(x^2)].$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{f''(x)\cdot f(x)-f'(x)\cdot f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=\dfrac{f''(x)\cdot f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}$.

4. 试从 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$ 导出:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$;　　　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{y'}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left[-(y')^{-2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y')\right]\cdot\frac{1}{y'}=\left[-(y')^{-2}\cdot y''\right]\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

(2) $$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[-\frac{y''}{(y')^3}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\frac{y''}{(y')^3}\right]\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left[-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'')\cdot(y')^3-y''\cdot 3(y')^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y')}{(y')^6}\right]\cdot\frac{1}{y'}$$

$$=\left[-\frac{y'''\cdot(y')^3-y''\cdot 3(y')^2\cdot y''}{(y')^6}\right]\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}.$$

5. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin\omega t$ （A 和 ω 是常数），求物体运动的加速度，并验证 $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2s=0$.

解 物体运动的速度为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=A\cdot\cos\omega t\cdot\omega=A\omega\cos\omega t,$$

物体运动的加速度为

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=A\omega\cdot(-\sin\omega t)\cdot\omega=-A\omega^2\sin\omega t=-\omega^2s.$$

因而 $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2s=0$.

6. 密度大的陨星进入大气层时，当它离地心为 s km 时的速度与 $\sqrt{s}$ 成反比. 试证陨星的加速度与 s^2 成反比.

解 设陨星的运动规律为 $s=s(t)$，则陨星的速度为

$$v=v(t)=s'(t)=\frac{k}{\sqrt{s}} \quad （k \text{ 为比例系数}），$$

陨星的加速度为

$$a=a(t)=v'(t)=k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot s^{-\frac{3}{2}}\cdot s'(t)=k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot s^{-\frac{3}{2}}\cdot v(t)=-\frac{k^2}{2s^2},$$

即陨星的加速度与 s^2 成反比.

7. 假设质点沿 x 轴运动的速度为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x)$，试求质点运动的加速度.

解 设质点的运动规律为 $x=x(t)$，则质点运动的速度为

$$v=v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x),$$

质点运动的加速度为

$$a=a(t)=v'(t)=f'(x)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f'(x)\cdot f(x).$$

8. 试证函数 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda x}+C_2\mathrm{e}^{-\lambda x}$ （λ, C_1, C_2 是常数）满足关系式 $y''-\lambda^2 y=0$.

解 $y'=C_1\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda x)'+C_2\mathrm{e}^{-\lambda x}(-\lambda x)'=\lambda(C_1\mathrm{e}^{\lambda x}-C_2\mathrm{e}^{-\lambda x})$,

$$y''=\lambda[C_1\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda x)'-C_2\mathrm{e}^{-\lambda x}(-\lambda x)']=\lambda^2(C_1\mathrm{e}^{\lambda x}+C_2\mathrm{e}^{-\lambda x})=\lambda^2 y,$$

因而 $y''-\lambda^2 y=0$.

9. 试证函数 $y=\mathrm{e}^x\sin x$ 满足关系式 $y''-2y'+2y=0$.

解 $y'=(\mathrm{e}^x)'\sin x+\mathrm{e}^x(\sin x)'=\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)$,

$$y''=(\mathrm{e}^x)'(\sin x+\cos x)+\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)'=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)+\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)=2\mathrm{e}^x\cos x,$$

因而 $y''-2y'+2y=2\mathrm{e}^x\cos x-2\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)+2\mathrm{e}^x\sin x=0$.

10. 求下列函数所指定的阶的导数: (1) $y=\mathrm{e}^x\cos x$，求 $y^{(4)}$; (2) $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$.

解 (1) 令 $u=\mathrm{e}^x$，则 $u'=u''=u'''=u^{(4)}=\mathrm{e}^x$；令 $v=\cos x$，则

$$v'=-\sin x, v''=-\cos x, v'''=\sin x, u^{(4)}=\cos x,$$

因而由莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned}y^{(4)}&=(uv)^{(4)}=u^{(4)}v+4u'''v'+6u''v''+4u'v'''+uv^{(4)}\\&=\mathrm{e}^x\cos x+4\mathrm{e}^x(-\sin x)+6\mathrm{e}^x(-\cos x)+4\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x\\&=-4\mathrm{e}^x\cos x.\end{aligned}$$

或

$$y'=(\mathrm{e}^x)'\cos x+\mathrm{e}^x(\cos x)'=\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{e}^x(-\sin x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x),$$

$$y''=(\mathrm{e}^x)'(\cos x-\sin x)+\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)' =\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)+\mathrm{e}^x(-\sin x-\cos x) =-2\mathrm{e}^x\sin x,$$

$$y'''=-2[(\mathrm{e}^x)'\sin x+\mathrm{e}^x(\sin x)']=-2(\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x) =-2\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x),$$

$$y^{(4)}=-2[(\mathrm{e}^x)'(\cos x+\sin x)+\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)']=-2[\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)+\mathrm{e}^x(-\sin x+\cos x)]$$

$$=-4\mathrm{e}^x\cos x.$$

(2) 令 $u=\sin 2x$，则

$$u'=\cos 2x\cdot(2x)' =2\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$u''=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)' =2^2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2^2\sin\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$u'''=2^2\cos\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)' =2^3\cos\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right) =2^3\sin\left(2x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

一般地，可得

$$u^{(n)}=2^n\sin\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

令 $v=x^2$，则

$$v'=2x,\quad v''=2,\quad v'''=v^{(4)}=\cdots=v^{(50)}=0.$$

因而由莱布尼茨公式得

$$y^{(50)}=(uv)^{(50)} =u^{(50)}v+50u^{(49)}v'+\frac{50\cdot 49}{2!}u^{(48)}v''+\frac{50\cdot 49\cdot 48}{3!}u^{(47)}v'''+\cdots+uv^{(50)}$$

$$=2^{50}\sin\left(2x+50\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot x^2+50\cdot 2^{49}\sin\left(2x+49\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2x +\frac{50\cdot 49}{2!}\cdot 2^{48}\sin\left(2x+48\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2$$

$$=2^{49}(-2x^2\sin 2x+100x\cos 2x+1225\sin 2x).$$

* **11.** 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式:

(1) $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$ （$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是常数）;

(2) $y=\sin^2 x$;　　(3) $y=x\ln x$;　　(4) $y=x\mathrm{e}^x$.

解 (1) $y'=nx^{n-1}+a_1\cdot(n-1)x^{n-2}+a_2\cdot(n-2)x^{n-3}+\cdots+a_{n-2}\cdot 2x+a_{n-1}\cdot 1+0$,

$y''=n\cdot(n-1)x^{n-2}+a_1\cdot(n-1)\cdot(n-2)x^{n-3}+a_2\cdot(n-2)\cdot(n-3)x^{n-4}+\cdots+a_{n-2}\cdot 2\cdot 1+0+0$,

一般地，可得

$$y^{(i)}=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-i+1)x^{n-i}+a_1\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-i)x^{n-i-1}$$

$$+a_2\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot(n-i-1)x^{n-i-2}+\cdots+a_{n-i}\cdot i\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1+\overbrace{0+\cdots+0}^{i\text{个}},$$

因而 $y^{(n)}=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1+\overbrace{0+\cdots+0}^{n\text{个}}=n!$.

(2) $y'=2\sin x\cdot(\sin x)' =2\sin x\cos x=\sin 2x$,

$$y''=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)'=2^2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2^2\sin\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(4)}=2^2\cos\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)'=2^3\cos\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=2^3\sin\left(2x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

一般地，可得

$$y^{(n)}=2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right].$$

(3) $y'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1$，$y''=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$，$y'''=-1\cdot x^{-2}$，$y^{(4)}=-1\cdot(-2)x^{-3}$，

一般地，可得

$$y^{(n)}=-1\cdot(-2)\cdot\cdots\cdot[-(n-2)]x^{-(n-1)}=(-1)^{n-2}(n-2)!x^{-(n-1)}\ (n\geqslant 2).$$

(4) $y'=(x)'\mathrm{e}^x+x(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=(x+1)\mathrm{e}^x$，

$$y''=(x+1)'\mathrm{e}^x+(x+1)(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x=(x+2)\mathrm{e}^x,$$

$$y'''=(x+2)'\mathrm{e}^x+(x+2)(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x+(x+2)\mathrm{e}^x=(x+3)\mathrm{e}^x,$$

一般地，可得 $y^{(n)}=(x+n)\mathrm{e}^x$.

* **12.** 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)\ (n\geqslant 3)$.

解 令 $u=\ln(1+x)$，则

$$u'=\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'=(1+x)^{-1},\ u''=-(1+x)^{-2}\cdot(1+x)'=-1\cdot(1+x)^{-2},$$

$$u'''=-1\cdot(-2)(1+x)^{-3}\cdot(1+x)'=-1\cdot(-2)(1+x)^{-3},$$

一般地，可得

$$u^{(n)}=-1\cdot(-2)\cdot\cdots\cdot[-(n-1)](1+x)^{-n}=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}.$$

令 $v=x^2$，则 $v'=2x$，$v''=2$，$v'''=v^{(4)}=\cdots=v^{(50)}=0$.

因而由莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)=(uv)^{(n)}&=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n\cdot(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}u^{(n-3)}v'''+\cdots+uv^{(n)}\\&=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}\cdot x^2+n\cdot(-1)^{n-2}(n-2)!(1+x)^{-(n-1)}\cdot 2x\\&\quad+\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot(-1)^{n-3}(n-3)!(1+x)^{-(n-2)}\cdot 2.\end{aligned}$$

所以

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+0)^{-n}\cdot 0^2+n\cdot(-1)^{n-2}(n-2)!(1+0)^{-(n-1)}\cdot 2\cdot 0$$

$$+\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot(-1)^{n-3}(n-3)!(1+0)^{-(n-2)}\cdot 2$$

$$=(-1)^{n-3}n\cdot(n-1)\cdot(n-3)!=(-1)^{n-3}\frac{n!}{n-2}=(-1)^{n-1}\frac{n!}{n-2}\ (n\geqslant 3).$$

习题 2-4

1. 求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $y^2-2xy+9=0$; (2) $x^3+y^3-3axy=0$; (3) $xy=\mathrm{e}^{x+y}$; (4) $y=1-x\mathrm{e}^y$.

解 (1) 方程两边对 x 求导得

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2\left(1\cdot y+x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+0=0$$

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{y-x}\quad(y-x\neq 0)$.

(2) 方程两边对 x 求导得

$$3x^2+3y^2\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3a\left(1\cdot y+x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0,$$

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\quad(y^2-ax\neq 0)$.

(3) 方程两边对 x 求导得

$$1\cdot y+x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x+y}\cdot\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{x+y}}\quad(x-\mathrm{e}^{x+y}\neq 0)$，或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(x-1)}{x(1-y)}\quad(xy=\mathrm{e}^{x+y})$.

(4) 方程两边对 x 求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0-\left(1\cdot\mathrm{e}^y+x\cdot\mathrm{e}^y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{e}^y}{1+x\mathrm{e}^y}\ (1+x\mathrm{e}^y\neq 0)$.

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

解 方程两边对 x 求导得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\ (x\neq 0,y\neq 0).$$

切线斜率为 $k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\sqrt{2}}{4}a}=-1$，切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=-1\cdot\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a\right),$$

即 $x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}a=0$. 法线斜率为 $k_1=-\frac{1}{k}=1$，法线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=1\cdot\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a\right),$$

即 $x-y=0$.

3. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $x^2-y^2=1$; (2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; (3) $y=\tan(x+y)$; (4) $y=1+x\mathrm{e}^y$.

解 (1) 方程两边对 x 求导，得

$$2x-2y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}\quad(y\neq 0).$$

上式两边对 x 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1\cdot y-x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{y^2},$$

把 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}$ 代入，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}\quad(y\neq 0).$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{y^3}\quad(x^2-y^2=1).$$

(2) 方程两边对 x 求导，得

$$b^2\cdot 2x+a^2\cdot 2y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{b^2x}{a^2y}\quad(y\neq 0).$$

上式两边对 x 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1\cdot y-x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{y^2},$$

把 $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$ 代入，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2y^3}\quad(y\neq 0).$$

或

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}\quad(b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2).$$

(3) 方程两边对 x 求导，得

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2(x+y)\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right),$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sec^2(x+y)}{\sec^2(x+y)-1}=-\frac{\sec^2(x+y)}{\tan^2(x+y)}=-\frac{1}{\sin^2(x+y)}=-\csc^2(x+y).$$

上式两边对 x 求导，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2\csc(x+y)\cdot[-\csc(x+y)\cot(x+y)]\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right),$$

把 $\frac{dy}{dx}=-\csc^2(x+y)$ 代入，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y).$$

(4) 方程两边对 x 求导，得

$$\frac{dy}{dx}=0+\left(1\cdot e^y+x\cdot e^y\cdot\frac{dy}{dx}\right),$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{1-xe^y}\quad(1-xe^y\neq 0).$$

上式两边对 x 求导，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{e^y\cdot\frac{dy}{dx}\cdot(1-xe^y)-e^y\left[0-\left(1\cdot e^y+x\cdot e^y\cdot\frac{dy}{dx}\right)\right]}{(1-xe^y)^2},$$

把 $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{1-xe^y}$ 代入，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}.$$

或

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}\quad(y=1+xe^y).$$

4. 用对数求导法求下列函数的导数.

(1) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$； (2) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$； (3) $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$； (4) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

解 (1) 方程两边取以 e 为底的对数，得

$$\ln y = x[\ln x - \ln(1+x)],$$

方程两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1\cdot[\ln x - \ln(1+x)] + x\cdot\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\cdot(0+1)\right],$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\left(\ln\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right).$$

(2) $y = (x-5)^{\frac{1}{5}}(x^2+2)^{-\frac{1}{25}}$，方程两边取以 e 为底的对数，得

$$\ln y = \frac{1}{5}\ln(x-5) - \frac{1}{25}\ln(x^2+2),$$

方程两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-5}\cdot(1-0) - \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{x^2+2}\cdot(2x+0),$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\left[\frac{1}{5(x-5)} - \frac{2x}{25(x^2+2)}\right] = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\cdot\left[\frac{1}{5(x-5)} - \frac{2x}{25(x^2+2)}\right].$$

(3) $y = (x+2)^{\frac{1}{2}}(3-x)^4(x+1)^{-5}$，方程两边取以 e 为底的对数，得

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(x+2) + 4\ln(3-x) - 5\ln(x+1),$$

方程两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}\cdot(1+0) + 4\cdot\frac{1}{3-x}\cdot(0-1) - 5\cdot\frac{1}{x+1}\cdot(1+0),$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\cdot\left[\frac{1}{2(x+2)} + \frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+1}\right] = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\cdot\left[\frac{1}{2(x+2)} + \frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+1}\right].$$

(4) $y = x^{\frac{1}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2}}(1-\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{4}}$，方程两边取以 e 为底的对数，得

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln(\sin x) + \frac{1}{4}\ln(1-\mathrm{e}^x),$$

方程两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^x}\cdot(0-\mathrm{e}^x),$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\left[\frac{1}{2x} + \frac{\cot x}{2} - \frac{\mathrm{e}^x}{4(1-\mathrm{e}^x)}\right] = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}\cdot\left[\frac{1}{2x} + \frac{\cot x}{2} - \frac{\mathrm{e}^x}{4(1-\mathrm{e}^x)}\right].$$

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$: (1) $\begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = \theta(1-\sin\theta), \\ y = \theta\cos\theta. \end{cases}$

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{b\cdot 3t^2}{a\cdot 2t} = \dfrac{3bt}{2a}$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}} = \dfrac{1\cdot\cos\theta + \theta(-\sin\theta)}{1\cdot(1-\sin\theta)+\theta(0-\cos\theta)} = \dfrac{\cos\theta - \theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$.

6. 已知 $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t\sin t, \\ y = \mathrm{e}^t\cos t. \end{cases}$ 求当 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的值.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{\mathrm{e}^t\cos t + \mathrm{e}^t(-\sin t)}{\mathrm{e}^t\sin t + \mathrm{e}^t\cos t} = \dfrac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2$.

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

(1) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t. \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处; (2) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}. \end{cases}$ 在 $t=2$ 处.

解 (1) 当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时, $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y=0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{-\sin 2t\cdot 2}{\cos t} = -4\sin t,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -4\sin\frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2}.$$

切线斜率为 $k = \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt{2}$, 切线方程为

$$y-0 = -2\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

即 $2\sqrt{2}x+y-2=0$. 法线斜率为 $k_1 = -\dfrac{1}{k} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, 法线方程为

$$y-0 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

即 $\sqrt{2}x-4y-1=0$.

(2) 当$t=2$时，$x=\frac{6a}{5}$，$y=\frac{12a}{5}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{3a\cdot 2t(1+t^2)-3at^2(0+2t)}{(1+t^2)^2}}{\frac{3a\cdot(1+t^2)-3at(0+2t)}{(1+t^2)^2}}=\frac{2t}{1-t^2},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}=-\frac{4}{3}.$$

切线斜率为$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}=-\frac{4}{3}$，切线方程为

$$y-\frac{12a}{5}=-\frac{4}{3}\cdot\left(x-\frac{6a}{5}\right),$$

即$4x+3y-12a=0$．法线斜率为$k_1=-\frac{1}{k}=\frac{3}{4}$，法线方程为

$$y-\frac{12a}{5}=\frac{3}{4}\cdot\left(x-\frac{6a}{5}\right),$$

即$3x-4y+6a=0$.

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $\begin{cases}x=\frac{t^2}{2},\\ y=1-t.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=3\mathrm{e}^{-t},\\ y=2\mathrm{e}^{t}.\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=f'(t),\\ y=tf'(t)-f(t).\end{cases}$ 设$f''(t)$存在且不为零.

解 (1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{0-1}{\frac{1}{2}\cdot 2t}=-\frac{1}{t}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-(-1\cdot t^{-2})}{\frac{1}{2}\cdot 2t}=\frac{1}{t^3}$.

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{b\cos t}{a(-\sin t)}=-\frac{b}{a}\cot t$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{b}{a}(-\csc^2 t)}{a(-\sin t)}=-\frac{b}{a^2}\csc^3 t$.

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2\mathrm{e}^t}{3\mathrm{e}^{-t}(-1)}=-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{2}{3}\cdot\mathrm{e}^{2t}\cdot 2}{3\mathrm{e}^{-t}\cdot(-1)}=\frac{4}{9}\mathrm{e}^{3t}$.

(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1\cdot f'(t)+t\cdot f''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{f''(t)}$.

***9.** 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$：(1) $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t.\end{cases}$

解 (1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-3t^2}{0-2t}=-\frac{1}{2}(t^{-1}-3t),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{2}(-1\cdot t^{-2}-3)}{0-2t}=-\frac{1}{4}(t^{-3}+3t^{-1}).$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{4}(-3\cdot t^{-4}-3t^{-2})}{0-2t}=-\frac{3(1+t^2)}{8t^5}.$$

(2) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot(0+2t)}=\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot(0+2t)}=\frac{1}{4}(t^{-1}+t),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{4}(-1\cdot t^{-2}+1)}{\frac{1}{1+t^2}\cdot(0+2t)}=\frac{t^4-1}{8t^3}.$$

10. 落在平静水面上的石头，产生同心波纹. 若最外一圈波半径的增大速率总是6 m/s，问在2 s末扰动水面面积增大的速率为多少?

解 设时刻t时，半径为$r=r(t)$，面积为$s=s(t)=\pi r^2$，则

$$\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=2\pi r\cdot\frac{dr}{dt},$$

依题意$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=2}=6$，$r(2)=6\cdot 2=12$，所以

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2}=2\pi r(2)\cdot\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=2}=2\pi\cdot 12\cdot 6=144\pi\approx 452.39\ (\mathrm{m}^2/\mathrm{s}).$$

11. 注水入深8 m、上顶直径8 m 的正圆锥形容器中，其速率为4 m^3/min. 当水深为5 m 时，其表面上升的速率为多少?

解 设容器对应的正圆锥高为H，底面圆的半径为R，则$H=8$，$R=4$. 设时刻t时，注入容器中的水对应的正圆锥高为h，底面圆的半径为r，体积为v，则

$$\frac{h}{r}=\frac{H}{R},$$

由 $\dfrac{H}{R}=\dfrac{8}{4}$，得 $r=\dfrac{h}{2}$，所以

$$v=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{12}\pi h^3,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}h}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{12}\pi\cdot 3h^2\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4}\pi h^2\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},\quad \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{h=5}=\frac{1}{4}\pi\cdot 5^2\cdot\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=5},$$

依题意 $\left.\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{h=5}=4$，即

$$4=\frac{1}{4}\pi\cdot 5^2\cdot\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=5}$$

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=5}=\dfrac{16}{25\pi}\approx 0.2037\ (\mathrm{m/min})$.

12. 溶液自深18 cm、顶直径12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径10 cm 的圆柱形筒中．开始时漏斗中盛满了溶液．已知当溶液在漏斗深为12 cm 时，其表面下降的速率为1 cm/min．问此时圆柱形筒中液体表面上升的速率为多少?

解 设漏斗对应的正圆锥高为 H，底面圆的半径为 R，体积为 V，则

$$H=18,\qquad R=6,\qquad V=\frac{1}{3}\pi R^2H=216\pi,$$

设时刻 t 时，漏斗中的水对应的正圆锥高为 h，底面圆的半径为 r，体积为 v；筒中的水对应的圆柱高为 h_1，底面圆的半径为 r_1，体积为 v_1，则

$$\frac{h}{r}=\frac{H}{R}=\frac{18}{6},\qquad r=\frac{h}{3},\qquad r_1=5,\ \ v=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{27}\pi h^3,\qquad v_1=\pi r_1^2h_1=25\pi h_1,$$

依题意 $V-v=v_1$，即

$$216\pi-\frac{1}{27}\pi h^3=25\pi h_1,$$

方程两边对 t 求导，得

$$0-\frac{1}{27}\pi\cdot 3h^2\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=25\pi\cdot\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t},$$

即

$$-\frac{1}{9}\pi h^2\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=25\pi\cdot\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t},$$

依题意 $\left.\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=12}=-1$，所以

$$-\frac{1}{9}\pi\cdot 12^2\cdot(-1)=25\pi\cdot\left.\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}\right|_{h=12},$$

即 $\left.\dfrac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}\right|_{h=12}=\dfrac{16}{25}=0.64\ \mathrm{cm/min}$.

习题 2-5

1. 已知 $y=x^3-x$，计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于1，0.1，0.01时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$．

解 $y'=3x^2-1$，$\mathrm{d}y=f'(x)\cdot\mathrm{d}x=f'(x)\cdot\Delta x=(3x^2-1)\cdot\Delta x$，

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \left[(x+\Delta x)^3 - (x+\Delta x)\right] - (x^3 - x) = (3x^2-1)\cdot\Delta x + 3x\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 .$$

当 $x=2, \Delta x=1$ 时，$\Delta y=18$，$\mathrm{d}y=11$；

当 $x=2, \Delta x=0.1$ 时，$\Delta y=1.161$，$\mathrm{d}y=1.1$；

当 $x=2, \Delta x=0.01$ 时，$\Delta y=0.110601$，$\mathrm{d}y=0.11$.

2. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2-1 所示，试在图 2-1(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 的 $\mathrm{d}y$ 、Δy 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$，并说明正负.

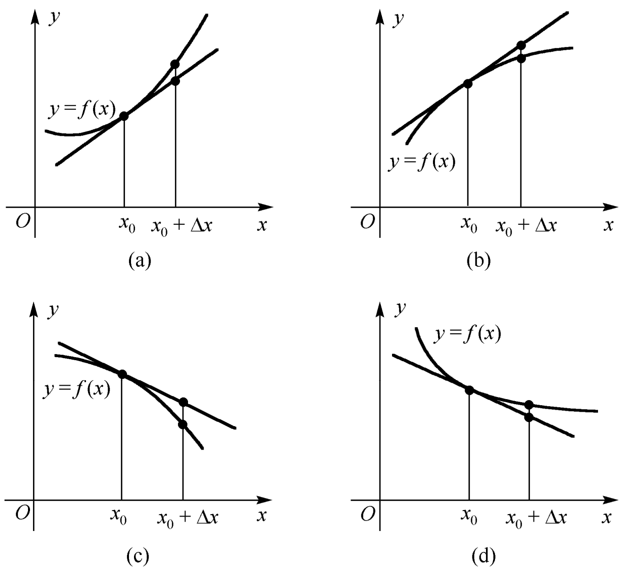


图 2-1

解 (a) $\Delta y > \mathrm{d}y > 0$，$\Delta y - \mathrm{d}y > 0$.　　(b) $\mathrm{d}y > \Delta y > 0$，$\Delta y - \mathrm{d}y < 0$.

(c) $\Delta y < \mathrm{d}y < 0$，$\Delta y - \mathrm{d}y < 0$.　　(c) $\mathrm{d}y < \Delta y < 0$，$\Delta y - \mathrm{d}y > 0$.

3. 求下列函数的微分.

(1) $y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$　　(2) $y=x\sin 2x$；　　(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$；

(4) $y=\ln^2(1-x)$；　　(5) $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$；　　(6) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$；

(7) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；　　(8) $y=\tan^2(1+2x^2)$；　　(9) $y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

(10) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$（$A,\omega,\varphi$ 是常数）.

解 (1) $\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)+\mathrm{d}(2\sqrt{x}) = -x^{-2}\mathrm{d}x + 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2}\mathrm{d}x$.

(2) $\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x)\cdot\sin 2x + x\cdot\mathrm{d}(\sin 2x) = 1\cdot\mathrm{d}x\cdot\sin 2x + x\cdot\cos 2x\cdot\mathrm{d}(2x)$

$\quad = \sin 2x\cdot\mathrm{d}x + x\cdot\cos 2x\cdot 2\cdot 1\cdot\mathrm{d}x = (\sin 2x + 2x\cos 2x)\mathrm{d}x$.

(3) $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}(x)\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot\mathrm{d}(\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \dfrac{1\cdot\mathrm{d}x\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\mathrm{d}x}{x^2+1} = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

(4) $\mathrm{d}y=2\ln(1-x)\cdot\mathrm{d}\left[\ln(1-x)\right]=2\ln(1-x)\cdot\dfrac{1}{1-x}\mathrm{d}(1-x)=2\ln(1-x)\cdot\dfrac{1}{1-x}\cdot(-\mathrm{d}x)=\dfrac{2\ln(1-x)}{x-1}\mathrm{d}x$.

(5) $\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^2)\cdot \mathrm{e}^{2x}+x^2\cdot\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})=2x\cdot\mathrm{d}x\cdot\mathrm{e}^{2x}+x^2\cdot\mathrm{e}^{2x}\cdot 2\mathrm{d}x=2x(1+x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

(6) $\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})\cdot\cos(3-x)+\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{d}\left[\cos(3-x)\right]=\mathrm{e}^{-x}\cdot(-\mathrm{d}x)\cdot\cos(3-x)+\mathrm{e}^{-x}\cdot\left[-\sin(3-x)\right](-\mathrm{d}x)$

$=\mathrm{e}^{-x}\left[\sin(3-x)-\cos(3-x)\right]\mathrm{d}x$

(7) $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\cdot\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x\mathrm{d}x)$

$$=-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<0,\\ -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1.\end{cases}$$

(8) $\mathrm{d}y=2\tan(1+2x^2)\cdot\mathrm{d}\left[\tan(1+2x^2)\right]=2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\cdot\mathrm{d}(1+2x^2)$

$=2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\cdot 4x\mathrm{d}x=8x\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\mathrm{d}x$.

(9) $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\cdot\mathrm{d}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\dfrac{(1+x^2)^2}{2(1+x^4)}\cdot\dfrac{\mathrm{d}(1-x^2)\cdot(1+x^2)-(1-x^2)\cdot\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$

$=\dfrac{1}{2(1+x^4)}\cdot\left[-2x\mathrm{d}x\cdot(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x\mathrm{d}x\right]=-\dfrac{2x}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

(10) $\mathrm{d}s=A\cos(\omega t+\varphi)\cdot\mathrm{d}(\omega t+\varphi)=A\cos(\omega t+\varphi)\cdot\omega\mathrm{d}t=A\omega\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$.

4. 将适当的函数填入下列括号内，使等式成立.

(1) $\mathrm{d}(\quad)=2\mathrm{d}x$；　(2) $\mathrm{d}(\quad)=3x\mathrm{d}x$；　(3) $\mathrm{d}(\quad)=\cos t\mathrm{d}t$；

(4) $\mathrm{d}(\quad)=\sin\omega x\mathrm{d}x(\omega\neq 0)$；　(5) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x$；　(6) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$；

(7) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　(8) $\mathrm{d}(\quad)=\sec^2 3x\mathrm{d}x$.

解 (1) 由 $\mathrm{d}(x)=\mathrm{d}x$，得

$$2\mathrm{d}x=2\mathrm{d}(x)=\mathrm{d}(2x),$$

即 $\mathrm{d}(2x)=2\mathrm{d}x$. 一般地，有

$$\mathrm{d}(2x+C)=2\mathrm{d}x,$$

其中 C 为任意常数.

(2)由 $\mathrm{d}(x^2)=2x\mathrm{d}x$，得

$$3x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\cdot 2x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\cdot\mathrm{d}(x^2)=\mathrm{d}\left(\frac{3}{2}x^2\right),$$

即 $\mathrm{d}\left(\dfrac{3}{2}x^2\right)=3x\mathrm{d}x$. 一般地，有

$$\mathrm{d}\left(\frac{3}{2}x^2+C\right)=3x\mathrm{d}x,$$

其中 C 为任意常数.

(3)由 $\mathrm{d}(\sin t)=\cos t\mathrm{d}t$，得

$$\mathrm{d}(\sin t+C)=\cos t\mathrm{d}t,$$

其中 C 为任意常数.

(4)由 $\mathrm{d}(\cos\omega x)=-\sin\omega x\mathrm{d}(\omega x)=-\omega\sin\omega x\mathrm{d}x$，得

$$\sin\omega x\mathrm{d}x=-\frac{1}{\omega}\mathrm{d}(\cos\omega x)=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega x\right),$$

即 $\mathrm{d}\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega x\right)=\sin\omega x\mathrm{d}x$. 一般地，有

$$\mathrm{d}\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega x+C\right)=\sin\omega x\mathrm{d}x,$$

其中 C 为任意常数.

(5)由 $\mathrm{d}\left[\ln(1+x)\right]=\frac{1}{1+x}\mathrm{d}(1+x)=\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$，得

$$\mathrm{d}\left[\ln(1+x)\right]=\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x,$$

一般地，有

$$\mathrm{d}\left[\ln(1+x)+C\right]=\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x,$$

其中 C 为任意常数.

(6) 由 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(-2x)=-2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，得

$$\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right),$$

即 $\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$. 一般地，有

$$\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C\right)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x,$$

其中 C 为任意常数.

(7) 由 $\mathrm{d}(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，得

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}(\sqrt{x})=\mathrm{d}(2\sqrt{x}),$$

即 $\mathrm{d}(2\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. 一般地，有

$$\mathrm{d}(2\sqrt{x}+C)=\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

其中 C 为任意常数.

(8) 由 $\mathrm{d}(\tan 3x)=\sec^2 3x\mathrm{d}(3x)=3\sec^2 3x\mathrm{d}x$，得

$$\sec^2 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}(\tan 3x)=\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}\tan 3x\right),$$

即 $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{3}\tan 3x\right)=\sec^2 3x\mathrm{d}x$. 一般地，有

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}\tan 3x+C\right)=\sec^2 3x\mathrm{d}x,$$

其中 C 为任意常数.

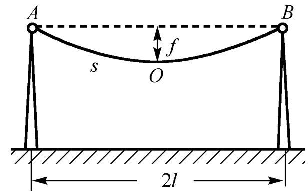


图 2-2

5. 如图 2-2 所示的电缆 $\overline{AOB}$ 的长为 s，跨度为 $2l$，电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f，则电缆长度可以按公式 $s=2l\left(1+\dfrac{2f^2}{3l^2}\right)$ 计算. 当 f 变化了 Δf 时，电缆长度的变化约为多少?

解 $\mathrm{d}s=2l\left[\mathrm{d}(1)+\mathrm{d}\left(\dfrac{2f^2}{3l^2}\right)\right]=2l\cdot\dfrac{2}{3l^2}\mathrm{d}(f^2)=\dfrac{4}{3l}\cdot 2f\mathrm{d}f=\dfrac{8f}{3l}\mathrm{d}f$，$\Delta s\approx\mathrm{d}s=\dfrac{8f}{3l}\mathrm{d}f=\dfrac{8f}{3l}\Delta f$.

6. 设扇形的圆心角 $\alpha=60^\circ$，半径 $R=100$ cm. 如果 R 不变，α 减少 $30'$，问扇形面积大约改变了多少? 又如果 α 不变，R 增加 1 cm，问扇形面积大约改变了多少?

解 设扇形的面积为 s，则 $s:\alpha=\pi R^2:2\pi$，即

$$s=\frac{\pi R^2\alpha}{2\pi}=\frac{1}{2}R^2\alpha.$$

当半径 R 不变时，$\mathrm{d}s=\dfrac{1}{2}R^2\mathrm{d}\alpha$，$\Delta s\approx\mathrm{d}s=\dfrac{1}{2}R^2\mathrm{d}\alpha=\dfrac{1}{2}R^2\Delta\alpha$.

当 $\alpha=60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$，$\Delta\alpha=-30'=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{180}=-\dfrac{\pi}{360}$，$R=100$ 时，

$$\Delta s\approx\frac{1}{2}\cdot 100^2\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)=-\frac{125}{9}\pi\approx-43.63\quad(\mathrm{cm}^2).$$

当圆心角 α 不变时，

$$\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\alpha\mathrm{d}(R^2)=\frac{1}{2}\alpha\cdot 2R\mathrm{d}R=\alpha R\mathrm{d}R,\quad \Delta s\approx\mathrm{d}s=\alpha R\mathrm{d}R=\alpha R\Delta R.$$

当 $R=100$，$\Delta R=1$，$\alpha=60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\Delta s\approx\dfrac{\pi}{3}\cdot 100\cdot 1=\dfrac{100\pi}{3}\approx 104.72\quad(\mathrm{cm}^2)$.

7. 计算下列三角函数值的近似值: (1) $\cos 29^\circ$; (2) $\tan 136^\circ$.

解 (1) 设 $y=f(x)=\cos x$，则

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x=-\sin x\mathrm{d}x=-\sin x\Delta x,\quad \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\cos(x+\Delta x)-\cos x,$$

当 $f'(x)\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，由 $\Delta y\approx\mathrm{d}y$，得

$$\cos(x+\Delta x)-\cos x\approx-\sin x\Delta x,$$

当 $x=30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$，$\Delta x=-1^\circ=-\dfrac{\pi}{180}$ 时，得

$$\cos\left[\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{180}\right)\right]-\cos\frac{\pi}{6}\approx-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right),$$

所以

$$\cos 29^\circ = \cos\left[\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{180}\right)\right] \approx \cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{180\sqrt{3}+\pi}{360} \approx 0.8748 .$$

(2) 设 $y = f(x) = \tan x$，则

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = \sec^2 x\mathrm{d}x = \sec^2 x\Delta x, \quad \Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = \tan(x+\Delta x)-\tan x ,$$

当 $f'(x) \neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，由 $\Delta y \approx \mathrm{d}y$，得

$$\tan(x+\Delta x)-\tan x \approx \sec^2 x\cdot\Delta x ,$$

当 $x = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$， $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 时，得

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)-\tan\frac{3\pi}{4} \approx \sec^2\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180},$$

所以

$$\tan 136^\circ = \tan\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right) \approx \tan\frac{3\pi}{4}+\sec^2\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180} = -1+(-\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{180} = -1+\frac{\pi}{90} \approx -0.9651 .$$

8. 计算下列反三角函数值的近似值: (1) $\arcsin 0.5002$; (2) $\arccos 0.4995$.

解 (1) 设 $y = f(x) = \arcsin x$，则

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x, \quad \Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = \arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x ,$$

当 $f'(x) \neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，由 $\Delta y \approx \mathrm{d}y$，得

$$\arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x \approx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x ,$$

当 $x = 0.5$， $\Delta x = 0.0002$ 时，得

$$\arcsin(0.5+0.0002)-\arcsin 0.5 \approx \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}\cdot 0.0002 ,$$

所以

$$\arcsin 0.5002 = \arcsin(0.5+0.0002) \approx \arcsin 0.5+\frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}\cdot 0.0002 \approx \frac{\pi}{6}+0.00023 \approx 30^\circ 47'' .$$

(2) 设 $y = f(x) = \arccos x$，则

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x, \quad \Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = \arccos(x+\Delta x)-\arccos x ,$$

当 $f'(x) \neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，由 $\Delta y \approx \mathrm{d}y$，得

$$\arccos(x+\Delta x)-\arccos x \approx -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x ,$$

当 $x = 0.5$， $\Delta x = -0.0005$ 时，得

$$\arccos[0.5+(-0.0005)]-\arccos 0.5 \approx -\frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}\cdot(-0.0005) ,$$

所以

$$\arccos 0.4995 = \arccos\left[0.5+(-0.0005)\right] \approx \arccos 0.5 - \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}\cdot(-0.0005) = \frac{\pi}{3}+\frac{0.0010}{3}\sqrt{3}$$

$$\approx \frac{\pi}{3}+0.000577 \approx 60^\circ 2'.$$

9. 当 $|x|$ 较小时，证明下列近似公式: (1) $\tan x \approx x$ （x 是角的弧度值）; (2) $\ln(1+x)\approx x$; (3) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$; (4) $e^x \approx 1+x$. 并计算 $\tan 45'$ 和 $\ln 1.002$ 的近似值.

解 设 $y=f(x)$，则

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0),\quad dy = f'(x_0)dx = f'(x_0)\Delta x,$$

令 $x = x_0+\Delta x$，即 $\Delta x = x-x_0$，当 $f'(x_0)\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，有 $\Delta y\approx dy$，即

$$f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot(x-x_0),$$

所以

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

令 $x_0=0$，则当 $f'(0)\neq 0$，且 $|x|$ 很小时，有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x.$$

(1) 设 $f(x)=\tan x$，则

$$f'(x)=\sec^2 x,\quad f(0)=\tan 0 = 0,\quad f'(0)=\sec^2 0 = 1,$$

由 $f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$，得

$$\tan x \approx 0+1\cdot x,$$

所以，当 $|x|$ 很小时，有 $\tan x\approx x$.

(2) 设 $f(x)=\ln(1+x)$，则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f(0)=\ln(1+0)=0,\quad f'(0)=\frac{1}{1+0}=1.$$

由 $f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$，得

$$\ln(1+x)\approx 0+1\cdot x,$$

所以，当 $|x|$ 很小时，有 $\ln(1+x)\approx x$.

(3) 设 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$，则

$$f'(x)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1},\quad f(0)=\sqrt[n]{1+0}=1,\quad f'(0)=\frac{1}{n}(1+0)^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n},$$

由 $f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$，得

$$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}\cdot x,$$

所以，当 $|x|$ 较小时，有 $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}\cdot x$.

(4) 设 $f(x)=e^x$，则

$$f'(x)=e^x,\quad f(0)=e^0=1,\quad f'(0)=e^0=1,$$

由 $f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$，得

$$e^x \approx 1 + 1 \cdot x \approx 1 + x,$$

所以，当$|x|$很小时，有$e^x \approx 1 + x$.

因为

$$\tan 45' = \tan\left(\frac{45}{60}\right)^\circ = \tan\left(\frac{45}{60} \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \tan\frac{\pi}{240},$$

令$x = \dfrac{\pi}{240}$，所以，由(1)有$\tan x \approx x$，得

$$\tan 45' \approx \frac{\pi}{240} \approx 0.0131.$$

因为$\ln 1.002 = \ln(1 + 0.002)$，令$x = 0.002$，所以，由(2)$\ln(1 + x) \approx x$，得$\ln 1.002 \approx 0.002$.

10. 计算下列各根式的近似值：(1) $\sqrt[3]{996}$；(2) $\sqrt[6]{65}$.

解 (1) $\sqrt[3]{996} = \sqrt[3]{1000 - 4} = \sqrt[3]{1000(1 - 0.004)} = 10 \cdot \sqrt[3]{1 - 0.004}$.

设$f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$，则

$$f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(1 + x)^2}}, \quad f(0) = \sqrt[3]{1 + 0} = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(1 + 0)^2}} = \frac{1}{3},$$

当$|x|$很小时，由$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x$，得

$$\sqrt[3]{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot x,$$

令$x = -0.004$，所以

$$\sqrt[3]{1 - 0.004} = \sqrt[3]{1 + (-0.004)} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot (-0.004) \approx 0.9987,$$

因而$\sqrt[3]{996} \approx 9.987$.

(2) $\sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{64 + 1} = \sqrt[6]{64\left(1 + \dfrac{1}{64}\right)} = 2 \cdot \sqrt[6]{1 + \dfrac{1}{64}}$. 设$f(x) = \sqrt[6]{1 + x}$，则

$$f'(x) = \frac{1}{6 \cdot \sqrt[6]{(1 + x)^5}}, \quad f(0) = \sqrt[6]{1 + 0} = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{6 \cdot \sqrt[6]{(1 + 0)^5}} = \frac{1}{6},$$

当$|x|$很小时，由$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$，得

$$\sqrt[6]{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot x,$$

令$x = \dfrac{1}{64}$，所以

$$\sqrt[6]{1 + \frac{1}{64}} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64} \approx 1.0026,$$

因而$\sqrt[6]{65} \approx 2.0052$.

***11.** 计算球体体积时，要求精确度在2%内，问这时测量直径D的相对误差不能超过多少？

解 设球体体积为V，半径为R，则

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{6}\pi D^3\text{ , }\mathrm{d}V=\frac{1}{6}\pi\cdot 3D^2\mathrm{d}D\text{ , }\left|\frac{\mathrm{d}V}{V}\right|=\left|\frac{\frac{1}{6}\pi\cdot 3D^2\mathrm{d}D}{\frac{1}{6}\pi D^3}\right|=3\cdot\left|\frac{\mathrm{d}D}{D}\right|,$$

当$\left|\frac{\mathrm{d}V}{V}\right|\leqslant 2\%$时，得

$$\left|\frac{\mathrm{d}D}{D}\right|=\frac{1}{3}\cdot\left|\frac{\mathrm{d}V}{V}\right|\leqslant\frac{1}{3}\cdot 2\%\approx 0.6667\%\text{ .}$$

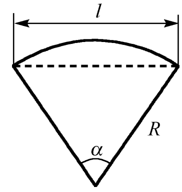


图 2-3

*12. 某厂生产如图 2-3 所示的扇形板，半径$R=200\,\mathrm{mm}$，要求中心角α为55°．产品检验时，一般用测量弦长l的办法来间接测量中心角α．如果测量弦长l时的误差$\delta_l=0.1\,\mathrm{mm}$，问由此而引起的中心角测量误差$\delta_\alpha$是多少?

解 因为$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{l}{2}}{R}=\frac{l}{2R}$，所以$\alpha=2\arcsin\frac{l}{2R}$，

$$\mathrm{d}\alpha=2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{l}{2R}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2R}\mathrm{d}l=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{R}\mathrm{d}l=\frac{1}{R\cos\frac{\alpha}{2}}\mathrm{d}l\text{ ,}$$

当$\alpha=55^\circ$，$R=200$，$|\Delta l|\leqslant\delta_l=0.1$时，

$$|\Delta\alpha|\approx|\mathrm{d}\alpha|=\left|\frac{1}{R\cos\frac{\alpha}{2}}\right|\cdot|\mathrm{d}l|=\left|\frac{1}{R\cos\frac{\alpha}{2}}\right|\cdot|\Delta l|$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{R\cos\frac{\alpha}{2}}\right|\cdot\delta_l=\frac{1}{200\cdot\cos\frac{55^\circ}{2}}\cdot 0.1\approx 0.00056\approx 1'56''=\delta_\alpha\text{ .}$$

总 习 题 二

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内.

(1) $f(x)$在点x_0可导是$f(x)$在点x_0连续的________条件. $f(x)$在点x_0连续是$f(x)$在点x_0可导的________条件.

(2) $f(x)$在点x_0的左导数$f'_-(x_0)$及右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等是$f(x)$在点x_0可导的_____条件.

(3) $f(x)$在点x_0可导是$f(x)$在点x_0可微的________条件.

解 (1) 充分；必要．如果函数$y=f(x)$在x_0点可导，则函数在该点连续；如果函数$y=f(x)$在x_0点连续，则函数在该点不一定可导.

(2) 充分必要．函数$y=f(x)$在点x_0处可导的充分必要条件是左导数$f'_-(x_0)$和右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等.

(3)充分必要. 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导.

2. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ ($n\geqslant 2$), 则 $f'(0)=$________.

解 $n!$.

令 $g(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 则 $g(0)=(0+1)(0+2)\cdots(0+n)=n!$, $g'(0)$ 存在, $f(x)=xg(x)$, 所以

$$f'(x)=1\cdot g(x)+xg'(x),$$

因而

$$f'(0)=1\cdot g(0)+0\cdot g'(0)=g(0)=n!.$$

或

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)(x+2)\cdots(x+n)=n!.$$

3. 下题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论.

设 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　).

A. $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　D. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

解 D.

A 错.

$$\lim_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]=\lim_{h\to+\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)}{\frac{1}{h}},$$

令 $\Delta x=\frac{1}{h}$, 当 $h\to+\infty$ 时, $\Delta x\to 0^+$, 所以

$$\lim_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'_+(a).$$

B 错.

例 $f(x)=\begin{cases}x, x\neq 0,\\ 1, x=0.\end{cases}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+2h)-f(0+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h-h}{h}=1,$$

函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不连续, 因而在该点不可导.

C 错. 同 B.

D 正确.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left[a+(-h)\right]-f(a)}{-h},$$

令 $\Delta x=-h$, 当 $h\to 0$ 时, $\Delta x\to 0$, 所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a).$$

4. 设有一根细棒，取棒的一端作为原点，棒上任意一点的坐标为 x，于是分布在区间 $[0,x]$ 上细棒的质量 m 与 x 存在函数关系 $m=m(x)$．应怎样确定细棒在点 x_0 处的线密度（对于均匀细棒来说，单位长度细棒的质量叫做该细棒的线密度）？

解 当 x 由 x_0 变为 $x_0+\Delta x$ 时，细棒的质量 m 由 $m(x_0)$ 变为 $m(x_0+\Delta x)$，这段细棒的平均线密度为

$$\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x},$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}$$

存在，此极限称为细棒在点 x_0 处的线密度，即细棒在点 x_0 处的线密度为 $m'(x_0)$．

5. 根据导数的定义，求 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}-\dfrac{1}{x(x+\Delta x)}=-\dfrac{1}{x^2}$.

6. 求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(0)$ 及 $f'_+(0)$，又 $f'(0)$ 是否存在?

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0.\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (1) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x-\ln(1+0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$,

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1$,

所以 $f'(0)=1$.

(2) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$,

当 $x\to 0^-$ 时，$\dfrac{1}{x}\to-\infty$，$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\to 0$，所以 $f'_-(0)=1$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}},$$

当 $x \to 0^+$ 时，$\frac{1}{x} \to +\infty$，$e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$，所以 $f'_+(0)=0$. 因而 $f'(0)$ 不存在.

7. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \qquad x=0. \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x},$$

极限不存在，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

8. 求下列函数的导数.

(1) $y=\arcsin(\sin x)$； (2) $y=\arctan\frac{1+x}{1-x}$； (3) $y=\ln\tan\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$；

(4) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$； (5) $y=x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$.

解 (1) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{|\cos x|}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{|\cos x|}$.

(2) $y'=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)}\cdot\frac{(1+x)'(1-x)-(1+x)(1-x)'}{(1-x)^2}$

$=\frac{1}{2(1+x^2)}\cdot\left[(1-x)-(1+x)\cdot(-1)\right]=\frac{1}{1+x^2}$.

(3) $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\left(\tan\frac{x}{2}\right)'-\left[-\sin x\cdot\ln\tan x+\cos x\cdot\frac{1}{\tan x}(\tan x)'\right]$

$=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}-\left(-\sin x\cdot\ln\tan x+\cos x\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x\right)$

$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}+\sin x\cdot\ln\tan x-\frac{1}{\sin x}=\sin x\cdot\ln\tan x$.

(4) $y'=\frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})'=\frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot\left(e^x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot e^{2x}\cdot 2\right)=\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

(5) $y=x^{\frac{1}{x}}=e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$，$y'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln x\right)'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)=x^{\frac{1}{x}-2}\cdot(1-\ln x)$.

9. 求下列函数的二阶导数: (1) $y=\cos^2 x\cdot\ln x$； (2) $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 (1) $y'=2\cos x(\cos x)'\cdot\ln x+\cos^2 x\cdot\frac{1}{x}=2\cos x(-\sin x)\cdot\ln x+\cos^2 x\cdot\frac{1}{x}$

$$=-\sin 2x\cdot\ln x+\cos^2 x\cdot\frac{1}{x},$$

$$y''=-\left(\cos 2x\cdot 2\cdot\ln x+\sin 2x\cdot\frac{1}{x}\right)+2\cos x\cdot(-\sin x)\cdot\frac{1}{x}+\cos^2 x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-2\cos 2x\cdot\ln x-\frac{2\sin 2x}{x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

(2) $$y'=\frac{(x)'\cdot\sqrt{1-x^2}-x\cdot(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{1\cdot\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)}{1-x^2}$$

$$=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y''=-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(1-x^2)'=-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)=3x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

* **10.** 求下列函数的 n 阶导数: (1) $y=\sqrt[m]{1+x}$; (2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 (1) $y=\sqrt[m]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{m}}$,

$$y'=\frac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1}\cdot(1+x)'=\frac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1},$$

$$y''=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-2}\cdot(1+x)'=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-2},$$

$$y'''=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-3}\cdot(1+x)'=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-3},$$

一般地, 可得

$$y^{(n)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}.$$

(2) $$y=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2-(1+x)}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1=2(1+x)^{-1}-1,$$

$$y'=2(-1)(1+x)^{-2}\cdot(1+x)'=2(-1)(1+x)^{-2},$$

$$y''=2(-1)(-2)(1+x)^{-3}\cdot(1+x)'=2(-1)(-2)(1+x)^{-3},$$

$$y'''=2(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}\cdot(1+x)'=2(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4},$$

一般地, 可得

$$y^{(n)}=2(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)(1+x)^{-(n+1)}=(-1)^n\cdot 2\cdot n!(1+x)^{-(n+1)}.$$

11. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$ 所确定, 求 $y''(0)$.

解 把 $x=0$ 代入 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$ 得 $y=1$, 即函数过 $(0,1)$ 点.

方程 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$ 两边分别对 x 求导, 得

$$e^y\cdot\frac{dy}{dx}+1\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{e^y+x}.$$

两边再分别对 x 求导，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{dy}{dx}\cdot(e^y+x)-y\left(e^y\frac{dy}{dx}+1\right)}{(e^y+x)^2},$$

把 $x=0$，$y=1$ 代入得

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{1}{e},\quad y''(0)=\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\frac{1}{e^2}.$$

12. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta.\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2},\\ y=\arctan t.\end{cases}$

解 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{a\cdot 3\sin^2\theta\cdot\cos\theta}{a\cdot 3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)}=-\tan\theta,$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\sec^2\theta}{a\cdot 3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)}=\frac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta.$$

(2) $x=\ln\sqrt{1+t^2}=\ln(1+t^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln(1+t^2),$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{1}{t},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=-\frac{1+t^2}{t^3}.$$

13. 求曲线 $\begin{cases}x=2e^t,\\ y=e^{-t}.\end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程和法线方程.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-e^{-t}}{2e^t}=-\frac{1}{2e^{2t}},\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-\frac{1}{2}.$

当 $t=0$ 时，$x=2$，$y=1$，即曲线过(2, 1)点. 所求切线斜率为 $k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-\frac{1}{2}$，所求切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2),$$

即 $x+2y-4=0$. 所求法线斜率为 $k_1=-\dfrac{1}{k}=2$, 所求法线方程为

$$y-1=2(x-2),$$

即 $2x-y-3=0$.

14. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

解 等式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$ 两边求极限, 得

$$\lim_{x\to 0}\left[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[8x+o(x)\right],\quad f(1)-3f(1)=0,$$

所以 $f\left(1\right)=0$.

等式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$ 两边除以 x, 再求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(1+\sin x\right)-3f\left(1-\sin x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{x},$$

因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin x)}{x}-3\frac{f(1-\sin x)}{x}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}+3\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x}\right]\\&=f'(1)+3f'(1)=4f'(1),\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[8+\frac{o(x)}{x}\right]=8,$$

所以 $4f'(1)=8$, 即 $f'(1)=2$. 由周期性知,

$$f(6)=f(1+5)=f(1)=0,\quad f(6+h)=f\left[(1+h)+5\right]=f(1+h),$$

$$f'(6)=\lim_{h\to 0}\frac{f(6+h)-f(6)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=2,$$

所求切线方程为 $y-0=2\left(x-6\right)$, 即 $2x-y-12=0$.

15. 当正在高度 H 水平飞行的飞机开始向机场跑道下降时, 如图 2-4 所示，从飞机到机场的水平地面距离为 L. 假设飞机下降的路径为三次函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图形, 其中 $y\big|_{x=-L}=H$, $y\big|_{x=0}=0$. 试确定飞机的降落路径.

解 $y'=3ax^2+2bx+c$, 由题意知

$$y\big|_{x=-L}=H;\quad y'\big|_{x=-L}=0;\quad y\big|_{x=0}=0;\quad y'\big|_{x=0}=0,$$

代入得

$$H=a(-L)^3+b(-L)^2+c(-L)+d;$$

$$0=3a(-L)^2+2b(-L)+c;$$

$$0=d;$$

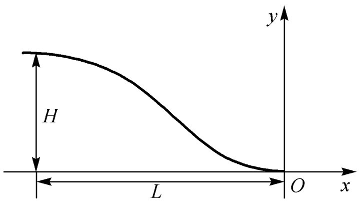


图 2-4

$$0 = c,$$

所以

$$a = \frac{2H}{L^3};\ \ b = \frac{3H}{L^2};\ \ c = 0;\ \ d = 0,$$

因而 $y = \dfrac{2H}{L^3}x^3 + \dfrac{3H}{L^2}x^2$.

16. 甲船以 6 km/h 的速率向东行驶，乙船以 8km/h 的速率向南行驶，在中午十二点整，乙船位于甲船之北16 km 处，问下午一点整两船相离的速率为多少?

解 设下午 t 时刻，两船距离为 s km，则

$$s = \sqrt{(6t)^2 + (16-8t)^2},$$

$$s' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(6t)^2 + (16-8t)^2}}\cdot\left[2\cdot(6t)\cdot 6 + 2\cdot(16-8t)\cdot(-8)\right],$$

$$s'(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6^2 + (16-8)^2}}\cdot\left[2\cdot 6\cdot 6 + 2\cdot(16-8)\cdot(-8)\right] = -2.8\ \text{(km/h)}.$$

17. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解 设 $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$，则

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},$$

当 $f'(x_0) \neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，由 $\Delta y \approx \mathrm{d}y$，得

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

令 $x_0 = 1$，$\Delta x = 0.02$，得

$$\sqrt[3]{1+0.02} - \sqrt[3]{1} \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}}\cdot 0.02,$$

所以 $\sqrt[3]{1.02} = \sqrt[3]{1+0.02} \approx \sqrt[3]{1} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{1^2}}\cdot 0.02 = 1 + \dfrac{1}{3}\cdot 0.02 \approx 1.0067$.

18. 已知单摆的振动周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，其中 $g = 980\ \text{cm/s}^2$，l 为摆长（单位为 cm）. 设原摆长为 20 cm，为使周期 T 增大 0.05 s，摆长约需加长多少?

解 $T' = 2\pi\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{l}{g}}}\cdot\dfrac{1}{g} = \dfrac{\pi}{\sqrt{gl}}$，当 $T'(l_0) \neq 0$ 且 $|\Delta l|$ 很小时，由 $\Delta T \approx \mathrm{d}T$ 得

$$\Delta T \approx T'(l_0)\cdot\Delta l.$$

令 $l_0 = 20$，$\Delta T = 0.05$，得 $0.05 \approx \dfrac{\pi}{\sqrt{980\cdot 20}}\cdot\Delta l$，所以 $\Delta l \approx 0.05\cdot\dfrac{\sqrt{980\cdot 20}}{\pi} = \dfrac{7}{\pi} \approx 2.23$ (cm).

第 3 章

微分中值定理与导数的应用

一、基 本 内 容

1. 微分中值定理
   (1) 费马（Fermat）引理;
   (2) 罗尔（Rolle）定理;
   (3) 拉格朗日（Lagrange）中值定理;
   (4) 柯西（Cauchy）中值定理.
2. 洛必达（L'Hospital）法则
   (1) 未定式;
   (2) 洛必达法则;
   (3) 应用洛必达法则的注意事项.
3. 泰勒（Taylor）中值定理
   (1) 泰勒公式;
   (2) 关于泰勒公式的说明;
   (3) 麦克劳林公式;
   (4) 常见初等函数的展开式.
4. 单调性及其判定
5. 极值
   (1) 极值的定义;
   (2) 取得极值的必要条件;
   (3) 取得极值的充分条件;
   (4) 确定极值点和极值的步骤.
6. 最值
   (1) 极值与最值的关系;
   (2) 最大值和最小值的求法;
   (3) 求最大值和最小值的步骤.
7. 凹凸性
8. 拐点
9. 函数图形的描绘
10. 弧微分与曲率

11. 方程的近似解

(1) 二分法;

(2) 切线法.

二、基本要求

1. 理解并会用罗尔定理、拉格朗日中值定理，了解柯西中值定理.
2. 理解洛必达法则，掌握用洛必达法则求 $\dfrac{0}{0}$ 型和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型以及 $0\cdot\infty, \infty-\infty$ 型未定式的极限的方法; 了解 $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型极限的求法.
3. 理解泰勒中值定理，掌握常见泰勒公式.
4. 理解函数的单调性和曲线的凹凸性的判定定理，会求函数的单调区间和曲线的凹凸区间. 会用二阶导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线.
5. 理解函数极值的概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数极值和最大值、最小值的求法及其简单应用.
6. 培养学生运用微分学综合知识的能力，描绘函数的图形.
7. 了解曲率和曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径.
8. 了解方程近似解的二分法及切线法.

三、习题解答

习题 3-1

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性.

解 因为 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上连续，在 $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ 内可导，且 $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=y\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$，所以由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$，使得 $y'(\xi)=0$.

由 $y'(x)=\cot x=0$ 得，$x=\dfrac{\pi}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$. 因此确有 $\xi=\dfrac{\pi}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$，使 $y'(\xi)=\cot\xi=0$.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性.

解 因为 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $y'(\xi)=\dfrac{y(1)-y(0)}{1-0}=0$.

由 $y'=12x^2-10x+1=0$ 得，$x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,\ 1)$.

因此确有 $\xi=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,\ 1)$，使 $y'(\xi)=\dfrac{y(1)-y(0)}{1-0}$.

3. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

解 因为 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上可导, 且在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内 $F'(x)=1-\sin x\neq 0$, 所以由柯西中值定理知, 至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

令 $\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)}$, 即 $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{2}{\pi-2}$, 化简得

$\sin x=\dfrac{8}{(\pi-2)^2+4}-1$, $x=\arcsin\left[\dfrac{8}{(\pi-2)^2+4}\right]\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ (易证 $0<\dfrac{8}{(\pi-2)^2+4}-1<1$).

即确实存在 $\xi=\arcsin\left[\dfrac{8}{(\pi-2)^2+4}\right]\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得 $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

4. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

证明 因为函数 $y=px^2+qx+r$ 在闭区间$[a, b]$上连续, 在开区间(a, b)内可导, 由拉格朗日中值定理, 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $y(b)-y(a)=y'(\xi)(b-a)$, 即

$$(pb^2+qb+r)-(pa^2+qa+r)=(2p\xi+q)(b-a).$$

故 $\xi=\dfrac{a+b}{2}$. 即所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

5. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数, 说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根, 并指出它们所在的区间.

解 由于 $f(x)$ 在$[1, 2]$上连续, 在$(1, 2)$内可导, 且 $f(1)=f(2)=0$, 所以由罗尔定理可知, 存在 $\xi_1\in(1,2)$, 使 $f'(\xi_1)=0$. 同理, 存在 $\xi_2\in(2,3)$, 使 $f'(\xi_2)=0$; 存在 $\xi_3\in(3,4)$, 使 $f'(\xi_3)=0$. 显然 ξ_1,ξ_2,ξ_3 都是方程 $f'(x)=0$ 的根.

由于方程 $f'(x)=0$ 是三次方程, 它至多有三个实根, 现已发现它的三个实根, 故它们也就是方程 $f'(x)=0$ 的全部根.

6. 证明恒等式 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

证明 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$, 因为

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0,$$

所以 $f(x)\equiv C$，其中 C 是一常数.

又 $f(x)=f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$，故 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

7. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 x_0，证明方程

$$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

必有一个小于 x_0 的正根.

证明 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$，则 $f'(x)=a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$. 由于 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续，在 $(0,x_0)$ 内可导，且 $f(0)=f(x_0)=0$，根据罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,x_0)$，使 $f'(\xi)=0$，即方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<b$，证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

证明 由于 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，且 $f(x_1)=f(x_2)$，根据罗尔定理，至少存在一点 $\xi_1\in(x_1,x_2)$，使 $f'(\xi_1)=0$. 同理存在一点 $\xi_2\in(x_2,x_3)$，使 $f'(\xi_2)=0$.

又由于 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 内可导，且 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，根据罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_3)$，使 $f''(\xi)=0$.

9. 设 $a>b>0$，$n>1$，证明 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

证明 设 $f(x)=x^n$，则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(b,a)$，使 $f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$，即 $a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)$.

因为 $b<\xi<a$，$n>1$，所以 $nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b)$，

即 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

10. 设 $a>b>0$，证明 $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

证明 设 $f(x)=\ln x$，则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(b,a)$，使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)\text{，即}\ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b).$$

因为 $0<b<\xi<a$，所以 $\dfrac{1}{a}(a-b)<\dfrac{1}{\xi}(a-b)<\dfrac{1}{b}(a-b)$，因此 $\dfrac{1}{a}(a-b)<\ln a-\ln b<\dfrac{1}{b}(a-b)$，

即 $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

11. 证明下列不等式：(1) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$；(2) 当 $x>1$ 时，$\mathrm{e}^x>\mathrm{e}\cdot x$.

证明 (1) 当 $a=b$ 时，显然成立.

当 $a\neq b$ 时，不妨设当 $a>b$，取函数 $f(x)=\arctan x$，则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(b,a)$，使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)\cdot(a-b)\text{，即}\arctan a-\arctan b=\frac{1}{1+\xi^2}(a-b)\text{，}$$

所以$|\arctan a-\arctan b|=\left|\dfrac{1}{1+\xi^2}(a-b)\right|\leqslant|a-b|$，即$|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$.

(2) 设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $f(x)$ 在 $[1,x]$ 上连续，在 $(1,x)$ 内可导，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(1,x)$，使

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1)\text{，即}\mathrm{e}^x-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{\xi}(x-1)\text{ .}$$

因为 $\xi>1$，所以 $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{\xi}(x-1)>\mathrm{e}(x-1)$，即 $\mathrm{e}^x>\mathrm{e}\cdot x$.

12. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

证明 设 $f(x)=x^5+x-1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 因为 $f(0)=-1$，$f(1)=1$，$f(0)\cdot f(1)<0$，由介值定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即 $x^5+x-1=0$ 至少有一个正根.

若方程不止一个正根，则至少有两个正根，不妨设两个正根为 a,b，$a>b>0$，则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，$f(b)=f(a)$，由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使 $f'(\xi)=0$. 与 $f'(x)=5x^4+1>0$ 矛盾.

因而方程 $x^5+x-1=0$ 只能有一个正根.

13. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内有一点 ξ，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b)\\ g(a) & g(b)\end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi)\\ g(a) & g'(\xi)\end{vmatrix}.$$

解 设 $\varphi(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x)\\ g(a) & g(x)\end{vmatrix}$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(b,a)$，使 $\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(b-a)$，即

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b)\\ g(a) & g(b)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f(a) & f(a)\\ g(a) & g(a)\end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi)\\ g(a) & g'(\xi)\end{vmatrix}.$$

因此$\begin{vmatrix} f(a) & f(b)\\ g(a) & g(b)\end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi)\\ g(a) & g'(\xi)\end{vmatrix}$.

14. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

证明 令 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 内有

$$\varphi'(x)=\frac{f'(x)\mathrm{e}^x-f(x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\frac{f(x)\mathrm{e}^x-f(x)\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^{2x}}\equiv0\text{，}$$

所以在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$\varphi(x)$ 为常数. 因此 $\varphi(x)=\varphi(0)=1$，从而 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

***15.** 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，试用柯西中值定理证明 $\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}(0<\theta<1)$.

证明 因为 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数，x 为该邻域内任意一点，对函数 $f(x)$ 和 x^n 在以 0 和 x 为端点的区间上，用柯西中值定理得

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}\quad(\xi_1\text{ 介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间}),$$

对函数 $f(x)$ 和 x^n 的一阶导数在以 0 和 ξ_1 为端点的区间上，用柯西中值定理得

$$\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\xi_1^{n-1}-n\cdot 0^{n-1}}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}\quad(\xi_2\text{ 介于 }0\text{ 与 }\xi_1\text{ 之间}),$$

对函数 $f(x)$ 和 x^n 的二阶导数在以 0 和 ξ_2 为端点的区间上，用柯西中值定理得

$$\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}=\frac{f''(\xi_2)-f''(0)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}-n(n-1)\cdot 0^{n-2}}=\frac{f'''(\xi_3)}{n(n-1)(n-2)\xi_3^{n-3}}\quad(\xi_3\text{ 介于 }0\text{ 与 }\xi_2\text{ 之间}),$$

以此类推，可得

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n(n-1)\cdots 2\cdot\xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n(n-1)\cdots 2\cdot\xi_{n-1}-n(n-1)\cdots 2\cdot 0}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}\quad(\xi_n\text{ 介于 }0\text{ 与 }\xi_{n\text{-}1}\text{ 之间}),$$

所以 $\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$.

由于 ξ_n 可以表示为 $\xi_n=\theta x(0<\theta<1)$，所以 $\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}(0<\theta<1)$.

习题 3-2

1. 用洛必达法则求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；　(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}\ (a\neq 0)$；　(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$；　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$；　(11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$；　(12) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$；

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；　(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$；　(15) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$；　(16) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x}{1}=\cos a$.

(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x}=-\dfrac{3}{5}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{2(\pi-2x)\cdot(-2)}=-\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\csc^2 x}{-2}=-\dfrac{1}{8}$.

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\dfrac{ma^{m-1}}{na^{n-1}}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\tan 7x}\cdot\sec^2 7x\cdot 7}{\dfrac{1}{\tan 2x}\cdot\sec^2 2x\cdot 2}=\dfrac{7}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 2x}{\tan 7x}=\dfrac{7}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sec^2 2x\cdot 2}{\sec^2 7x\cdot 7}=1$.

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{\sec^2 3x\cdot 3}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3}{2\cos x(-\sin x)}$

$=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-3\sin 3x}{-\sin x}=3$.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{1+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{2}=1$.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\ln(1+x^2)}{1-\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{-2\cos x(-\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

（注: $\cos x\cdot\ln(1+x^2)\sim x^2$）

(11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sec^2 2x\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$.

(12) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x^2}}\overset{t=\frac{1}{x^2}}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^t}{1}=+\infty$（注：当 $x\to 0$ 时，$t=\dfrac{1}{x^2}\to+\infty$）.

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$.

(14) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$,

而 $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{a}{x}}\cdot\left(-\dfrac{a}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax}{x+a}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{1}=a$,

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}=\mathrm{e}^a$.

(15) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\sin x\ln x}$,

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\csc x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\csc x\cdot\cot x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=0$,

所以 $\lim\limits_{x\to +0}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to +0}\mathrm{e}^{\sin x\ln x}=\mathrm{e}^0=1$.

(16) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{-\tan x\ln x}$,

而 $\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\cot x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\sin x=0$.

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-\tan x\ln x}=\mathrm{e}^0=1$.

2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\cdot\sin x\right)=1$，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 是存在的.

但 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ 不存在，不能用洛必达法则.

3. 验证极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\sin\dfrac{1}{x}=1\cdot0=0$，极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 是存在的.

但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在，不能用洛必达法则.

***4.** 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $f(0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=f(0)$，

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}$，

而 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-1}{2(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=f(0)$.

因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

习题 3-3

1. 按 $(x-4)$ 的幂展开多项式 $x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

解 设 $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$. 则 $f'(x)=4x^3-15x^2+2x-3$,

$f''(x)=12x^2-30x+2$，$f'''(x)=24x-30$，$f^{(4)}(x)=24$，$f^{(n)}(x)=0(n\geqslant 5)$.

因为 $f(4)=-56$，$f'(4)=21$，$f''(4)=74$，$f'''(4)=66$，$f^{(4)}(4)=24$.

所以

$$\begin{aligned}f(x)&=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x-4)^4\\&=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4.\end{aligned}$$

2. 应用麦克劳林公式, 按 x 的幂展开函数 $f(x)=(x^2-3x+1)^3$.

解　因为 $f'(x)=3(x^2-3x+1)^2(2x-3)$，

$f''(x)=6(x^2-3x+1)(2x-3)+6(x^2-3x+1)^2=30(x^2-3x+1)(x^2-3x+2)$，

$f'''(x)=30(2x-3)(x^2-3x+2)+30(x^2-3x+1)(2x-3)=30(2x-3)(2x^2-6x+3)$，

$f^{(4)}(x)=60(2x^2-6x+3)+30(2x-3)(4x-6)=360(x^2-3x+2)$，

$f^{(5)}(x)=360(2x-3)$，$f^{(6)}(x)=720$，$f^{(n)}(x)=0(n\geqslant 7)$.

$f(0)=1$，$f'(0)=-9$，$f''(0)=60$，$f'''(0)=-270$，$f^{(4)}(0)=720$，$f^{(5)}(0)=-1080$，

$f^{(6)}(0)=720$.

所以 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3+\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\dfrac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\dfrac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$

$$=1-9x+30x^2-45x^3+30x^4-9x^5+x^6.$$

3. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的3阶泰勒公式.

解　因为 $f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$，$f'''(x)=\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$，$f^{(4)}(x)=-\dfrac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$；

$f(4)=\sqrt{4}=2$，$f'(4)=\dfrac{1}{4}$，$f''(4)=-\dfrac{1}{32}$　$f'''(4)=\dfrac{3}{8\cdot 32}$，

所以 $\sqrt{x}=f(4)+f'(4)(x-4)+\dfrac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\dfrac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4$

$$=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{1}{4!}\cdot\frac{15}{16\sqrt{[4+\theta(x-4)]^7}}(x-4)^4\ (0<\theta<1).$$

4. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式.

解　因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f''(x)=(-1)\dfrac{1}{x^2}$，$f'''(x)=(-1)(-2)\dfrac{1}{x^3},\cdots,$

$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n+1)\dfrac{1}{x^n}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$；

$f(2)=\ln 2$,　$f^{(k)}(2)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$，

所以

$$\begin{aligned}\ln x&=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o[(x-2)^n]\\&=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o[(x-2)^n].\end{aligned}$$

5. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$f(x)=(-1)\dfrac{1}{x^2}$，$f''(x)=(-1)(-2)\dfrac{1}{x^3},\cdots,$

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\ \cdots\ (-n)\frac{1}{x^{n+1}}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}};$$

$$f(-1)=-1,\ f^{(k)}(-1)=\frac{(-1)^k k!}{(-1)^{k+1}}=-k!\ (k=1,2,\cdots,n),$$

所以
$$\begin{aligned}\frac{1}{x}&=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\cdots\\&\quad+\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}\\&=-[1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^n]+\frac{(-1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}(x+1)^{n+1}\ (0<\theta<1).\end{aligned}$$

6. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有佩亚诺型余项的 3 阶麦克劳林公式.

解 因为 $f'(x)=\sec^2 x$，$f''(x)=2\sec x\cdot\sec x\tan x=2\sec^2 x\cdot\tan x$,

$$f'''(x)=4\sec x\cdot\sec x\tan x\cdot\tan x+2\sec^2 x\cdot\sec^2 x=4\sec^2 x\cdot\tan^2 x+2\sec^4 x,$$

$$f^{(4)}(x)=8\sec^2 x\cdot\tan^3 x+8\sec^4 x\tan x+8\sec^4 x\tan x=\frac{8\sin x(\sin^2 x+2)}{\cos^5 x},$$

$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=2$，

所以 $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{\sin(\theta x)[\sin^2(\theta x)+2]}{3\cos^5(\theta x)}x^4\ (0<\theta<1)$.

因此带有佩亚诺型余项的 3 阶麦克劳林公式为 $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$.

7. 求函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的带有佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=(1+x)\mathrm{e}^x,$$
$$f''(x)=\mathrm{e}^x+(1+x)\mathrm{e}^x=(2+x)\mathrm{e}^x,$$
$$f'''(x)=\mathrm{e}^x+(2+x)\mathrm{e}^x=(3+x)\mathrm{e}^x,\cdots,$$
$$f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x+(n-1+x)\mathrm{e}^x=(n+x)\mathrm{e}^x;$$
$$f(0)=0,\ f^{(k)}(0)=k\ \ (k=1,2,\cdots,n),$$

所以
$$\begin{aligned}x\mathrm{e}^x&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)\\&=x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^n+o(x^n).\end{aligned}$$

8. 验证当 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，按公式 $\mathrm{e}^x\approx1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时，所产生的误差小于 0.01，并求 $\sqrt{\mathrm{e}}$ 的近似值，使误差小于 0.01.

解 因为公式 $e^x \approx 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ 右端为 e^x 的三阶麦克劳林公式, 其余项为

$$R_3(x)=\frac{e^{\xi}}{4!}x^4 \quad（\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}）,$$

所以当 $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时, 按公式 $e^x \approx 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的误差为

$$\left|R_3(x)\right|=\left|\frac{e^{\xi}}{4!}\cdot x^4\right| \leqslant \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0.0045<0.01 .$$

令 $x=\dfrac{1}{2}$, 得 $\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}} \approx 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \approx 1.645$.

9. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值, 并估计误差: (1) $\sqrt[3]{30}$; (2) $\sin 18^{\circ}$.

解 (1) 设 $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, 则 $f(x)$ 在 $x_0=27$ 点展开成三阶泰勒公式为

$$\begin{aligned} f(x)=\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{27}&+\frac{1}{3}\cdot 27^{-\frac{2}{3}}\cdot(x-27)+\frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot 27^{-\frac{5}{3}}\cdot(x-27)^2 \\ &+\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{10}{27}\right)\cdot 27^{-\frac{8}{3}}\cdot(x-27)^3+\frac{1}{4!}\cdot\left(-\frac{80}{81}\right)\xi^{-\frac{11}{3}}\cdot(x-27)^4. \end{aligned}$$

其中 ξ 介于 27 与 x 之间.

于是 $\quad \sqrt[3]{30} \approx \sqrt[3]{27}+\dfrac{1}{3}\cdot 27^{-\frac{2}{3}}\cdot 3+\dfrac{1}{2!}\cdot\left(-\dfrac{2}{9}\right)\cdot 27^{-\frac{5}{3}}\cdot 3^2+\dfrac{1}{3!}\cdot\left(\dfrac{10}{27}\right)\cdot 27^{-\frac{8}{3}}\cdot 3^3$

$$\approx 3\left(1+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^6}+\frac{5}{3^{10}}\right) \approx 3.10724,$$

其误差为 $\left|R_3(30)\right|=\left|\dfrac{1}{4!}\cdot\left(-\dfrac{80}{81}\right)\xi^{-\frac{11}{3}}\cdot 3^4\right|<\dfrac{1}{4!}\cdot\dfrac{80}{81}\cdot 27^{-\frac{11}{3}}\cdot 3^4=\dfrac{80}{4!\cdot 3^{11}}=1.88\times 10^{-5}$.

(2) 已知 $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{\sin\xi}{4!}x^4$, 其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

所以 $\sin 18^{\circ}=\sin\dfrac{\pi}{10} \approx \dfrac{\pi}{10}-\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0.3090$,

其误差为 $\left|R_3\left(\dfrac{\pi}{10}\right)\right|=\left|\dfrac{\sin\xi}{4!}\cdot\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^4\right|<\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{4!}\cdot\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^4 \approx 2.03\times 10^{-4}$.

***10**. 利用泰勒公式求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}\right)$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2\left[x+\ln(1-x)\right]}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t}}{t}$,

因为 $\sqrt[3]{1+3t}=(1+3t)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\cdot(3t)+o(t)$, $\sqrt[4]{1-2t}=(1-2t)^{\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{4}\cdot(-2t)+o(t)$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{[1+t+o(t)]-\left[1-\frac{1}{2}t+o(t)\right]}{t}=\lim_{t\to0^+}\left[\frac{3}{2}+\frac{o(t)}{t}\right]=\frac{3}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}=\lim_{x\to0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right]}{x^2\left\{x+\left[-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]\right\}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^2\left[-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=\frac{1}{6}.$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)x^4+o(x^4)\right]}{\left\{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right]-\left[1+x^2+o(x^2)\right]\right\}\cdot\left[x^2+o(x^2)\right]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{\left[-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\right]\cdot\left[x^2+o(x^2)\right]}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}+o(x^4)\frac{o(x^4)}{x^4}}{\left[-\frac{3}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]\cdot\left[1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]}=-\frac{1}{12}.$$

(4) $$\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right]=\frac{1}{2}.$$

习题 3-4

1. 判定函数 $f(x)=\arctan x-x$ 的单调性.

解 因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{1}{1+x^2}\leqslant0$, 且仅当 $x=0$ 时等号成立, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

2. 判定函数 $f(x)=x+\cos x$ 的单调性.

解 因为 $f'(x)=1-\sin x\geqslant0$, 且当 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时, $f'(x)=0$. 可以看出在 $(-\infty,+\infty)$ 的任一有限子区间上, 使 $f'(x)=0$ 的点只有有限个. 因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

3. 确定下列函数的单调区间.

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$; (2) $y=2x+\dfrac{8}{x}(x>0)$;

(3) $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$; (4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(5) $y=(x-1)(x+1)^3$; (6) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}\,(a>0)$;

(7) $y=x^n\mathrm{e}^{-x}(n>0,x\geqslant 0)$; (8) $y=x+|\sin 2x|$.

解 (1) $y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)$，令 $y'=0$，得驻点 $x_1=-1,x_2=3$.
因为当 $-1<x<3$ 时，$y'<0$；当 $x<-1$ 及 $x>3$ 时，$y'>0$，所以函数在 $[-1,3]$ 内单调减少；在 $(-\infty,-1]$ 和 $[3,+\infty)$ 内单调增加.

(2) $y'=2-\dfrac{8}{x^2}=\dfrac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$，令 $y'=0$，得驻点 $x_1=2,x_2=-2$（舍去）.
因为当 $0<x<2$ 时，$y'<0$；当 $x>2$ 时，$y'>0$，所以函数在 $(0,2]$ 内单调减少；在 $[2,+\infty)$ 内单调增加.

(3) $y'=\dfrac{-60(2x-1)(x-1)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}$，令 $y'=0$，得驻点 $x_1=\dfrac{1}{2},x_2=1$，$x=0$ 为不可导点.

因为当 $x<0$，$0<x<\dfrac{1}{2}$ 及 $x>1$ 时，$y'<0$；当 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 时，$y'>0$，所以在 $(-\infty,0)$，$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 及 $[1,+\infty)$ 内单调减少，在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调增加.

(4) 因为 $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$，所以函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

(5) $y'=(x+1)^3+3(x-1)(x+1)^2=4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+1)^2$，令 $y'=0$，得驻点 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=-1$.

因为当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$y'\leqslant 0$，且仅当 $x=-1$ 时等号成立；当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$y'>0$，所以函数在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ 内单调减少，在 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 内单调增加.

(6) $y'=\dfrac{-\left(x-\dfrac{2a}{3}\right)}{3\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}}$，令 $y'=0$，驻点为 $x_1=\dfrac{2a}{3}$；不可导点为 $x_2=\dfrac{a}{2},x_3=a$.

因为当 $\dfrac{2a}{3}<x<a$ 时，$y'<0$；当 $x>\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{a}{2}<x<\dfrac{2a}{2}$ 及 $x>a$ 时，$y'>0$，所以函数在 $\left[\dfrac{2a}{3},a\right)$ 内单调减少，在 $\left(-\infty,\dfrac{a}{2}\right)$，$\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{2a}{3}\right]$，$(a,+\infty)$ 内单调增加.

(7) $y'=\mathrm{e}^{-x}x^{n-1}(n-x)$，令 $y'=0$，得驻点 $x=n$.
因为当 $x>n$ 时，$y'<0$；当 $0<x<n$ 时，$y'>0$，所以函数在 $[n,+\infty)$ 内单调减少；在 $[0,n]$ 内单调增加.

(8) $y=\begin{cases} x+\sin 2x, & k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{2}; \\ x-\sin 2x, & k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi. \end{cases}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，

$$y'=\begin{cases}1+2\cos 2x, & k\pi<x<k\pi+\dfrac{\pi}{2};\\ 1-2\cos 2x, & k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi.\end{cases}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

y' 是以 π 为周期的函数，在一个周期 $[0,\pi]$ 内，令 $y'=0$，得驻点 $x_1=\dfrac{\pi}{3}$，$x_2=\dfrac{5\pi}{6}$；$x_3=\dfrac{\pi}{2}$ 可能为不可导点.

因为当 $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 及 $\dfrac{5\pi}{6}<x<\pi$ 时，$y'<0$；当 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ 及 $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{5\pi}{6}$ 时，$y'>0$，所以函数在 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 及 $\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$ 内单调减少，在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 及 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 内单调增加.

根据函数在 $[0,\pi]$ 上的单调性及 y' 在 $(-\infty,+\infty)$ 的周期性，可知函数在 $\left[\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少，在 $\left[\dfrac{k\pi}{2},\ \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调增加 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

4. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如图 3-1 所示，则导函数 $f'(x)$ 的图形为图 3-2 中所示的四个图形中的哪一个?

解 由 $y=f(x)$ 的图形可以看出，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调增加，在区间 $(0,+\infty)$ 内先单调增加，再单调减少，最后单调增加.

由 $y=f'(x)$ 的图形可以看出，对于图形 (D)，$f'(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内取正值，在区间 $(0,+\infty)$ 内先取正值，再取负值，最后取正值.

因而选图形 (D).

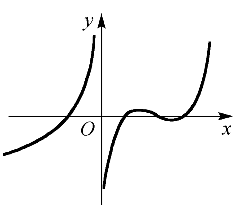
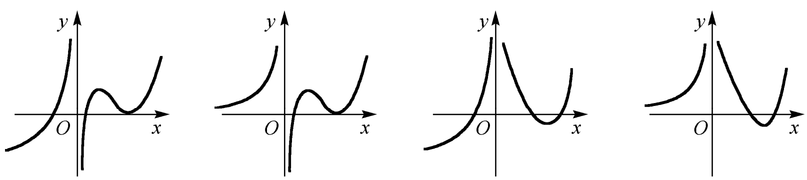


图 3-1



(A) (B) (C) (D)

图 3-2

5. 证明下列不等式.

(1) 当 $x>0$ 时，$1+\dfrac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$；

(2) 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$；

(3) 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$；

(4) 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\dfrac{1}{3}x^3$；

(5) 当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$.

证明 (1) 设 $f(x)=1+\dfrac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内是连续的. 因为当 $x>0$ 时，

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，从而当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>0$，也就是 $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

(2) 设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内是连续的. 因为当 $x>0$ 时,

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，从而当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>0$，也就是 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

(3) 设 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内是连续的. 因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2=\frac{(1-\cos x)(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}>0.$$

所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内是单调增加的，从而当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即

$$\sin x+\tan x-2x>0,$$

也就是 $\sin x+\tan x>2x$.

(4) 设 $g(x)=\tan x-x$，则 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内连续，$g'(x)=\sec^2 x-1=\tan^2 x$.

因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，因此当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$g(x)>g(0)=0$，即 $\tan x-x>0$.

再设 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内连续,

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x).$$

因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x-x>0,\tan x+x>0$，所以 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，因此当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $\tan x-x-\frac{1}{3}x^3>0$，也就是 $\tan x>x+\frac{1}{3}x^2$.

(5) 设 $f(x)=x\ln 2-2\ln x$，则 $f(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 内连续，因为当 $x>4$ 时,

$$f'(x)=\ln 2-\frac{2}{x}=\frac{\ln 4}{2}-\frac{2}{x}>\frac{\ln e}{2}-\frac{2}{4}=0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 内是单调增加的，因此当 $x>4$ 时，$f(x)>f(4)=0$，即 $x\ln 2>2\ln x$，也就是 $2^x>x^2$.

6. 讨论方程 $\ln x=ax$（其中 $a>0$）有几个实根?

解 设 $f(x)=\ln x-ax$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是连续的.

$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，驻点为 $x=\frac{1}{a}$.

因为当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内单调增加；当 $x>\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，所以

$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 内单调减少.因此 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值.又因为当 $x\to 0^+$ 及 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$. 所以

当 $f\left(\frac{1}{a}\right)>0$，即 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，方程有且仅有两个实根；当 $f\left(\frac{1}{a}\right)=0$，即 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，方程有且仅有一个实根；当 $f\left(\frac{1}{a}\right)<0$，即 $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，方程没有实根.

7. 单调函数的导函数是否必为单调函数？研究下面这个例子：$f(x)=x+\sin x$.

解　单调函数的导函数不一定为单调函数.

例如 $f(x)=x+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的，但其导数不是单调函数.

事实上，$f'(x)=1+\cos x\geqslant 0$，且只有可数个点等号成立，这就说明 $f(x)=x+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

因为 $f''(x)=-\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不保持确定的符号，故 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的.

8. 设 I 为一无穷区间，函数 $f(x)$ 在 I 上连续，I 内可导，试证明：如果在 I 的任一有限的子区间上，$f'(x)\geqslant 0$（或 $f'(x)\leqslant 0$），且等号仅在有限多个点处成立，那么 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）.

证明　在 I 内任取两点 x_1 和 x_2，不妨设 $x_1<x_2$. 在 $[x_1,x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，得到

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\geqslant 0 \text{（或}\leqslant 0\text{），}$$

其中 $\xi\in(x_1,x_2)$，即 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$（或 $f(x_2)\leqslant f(x_1)$），因此，$f(x)$ 在区间 I 上单调不减（或单调不增），从而对任一 $x\in[x_1,x_2]$，有

$$f(x_2)\geqslant f(x)\geqslant f(x_1) \quad \text{（或 } f(x_2)\leqslant f(x)\leqslant f(x_1)\text{）.}$$

若 $f(x_1)=f(x_2)$，则有 $f(x)\equiv f(x_1)$，$x\in[x_1,x_2]$，故 $f'(x)\equiv 0$，$x\in[x_1,x_2]$，这与 $f'(x)=0$ 在 I 的任一有限的子区间上仅在有限多个点处成立的假定相矛盾，因此 $f(x_2)>f(x_1)$（或 $f(x_2)<f(x_1)$），即 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）.

9. 判定下列曲线的凹凸性.

(1) $y=4x-x^2$；　(2) $y=\mathrm{sh}x$；　(3) $y=x+\frac{1}{x}\ (x>0)$；　(4) $y=x\arctan x$.

解　(1) $y'=4-2x, y''=-2$. 因为 $y''<0$，所以曲线在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凸的.

(2) $y'=\mathrm{ch}x, y''=\mathrm{sh}x$.

令 $y''=0$，得 $x=0$. 因为当 $x<0$ 时，$y''<0$；当 $x>0$ 时，$y''>0$，所以曲线在 $(-\infty,0]$ 内是凸的；在 $[0,+\infty)$ 内是凹的.

(3) $y'=1-\frac{1}{x^2}$，$y''=\frac{2}{x^3}$. 因为当 $x>0$ 时，$y''>0$，所以曲线在 $(0,+\infty)$ 内是凹的.

(4) $y'=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$，$y''=\frac{2}{(1+x^2)^2}$. 因为在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$y''>0$，所以曲线在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的.

10. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间.

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$；　(2) $y=x\mathrm{e}^{-x}$；　(3) $y=(x+1)^4+\mathrm{e}^x$；

(4) $y=\ln(x^2+1)$;　(5) $y=\mathrm{e}^{\arctan x}$;　(6) $y=x^4(12\ln x-7)$.

解 (1) $y'=3x^2-10x+3$, $y''=6x-10$. 令 $y''=0$, 得 $x=\dfrac{5}{3}$.

因为当 $x<\dfrac{5}{3}$ 时, $y''<0$; 当 $x>\dfrac{5}{3}$ 时, $y''>0$, 所以曲线在 $\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right]$ 内是凸的, 在 $\left[\dfrac{5}{3},+\infty\right)$ 内是凹的, 拐点为 $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{20}{27}\right)$.

(2) $y'=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}$, $y''=-\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}=(x-2)\mathrm{e}^{-x}$. 令 $y''=0$, 得 $x=2$.

因为当 $x<2$ 时, $y''<0$; 当 $x>2$ 时, $y''>0$, 所以曲线在 $(-\infty,2]$ 内是凸的; 在 $[2,+\infty)$ 内是凹的; 拐点为 $(2,2\mathrm{e}^{-2})$.

(3) $y'=4(x+1)^3+\mathrm{e}^x$, $y''=12(x+1)^2+\mathrm{e}^x$.

因为在 $(-\infty,+\infty)$ 内, $y''>0$, 所以曲线在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的; 无拐点.

(4) $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $y''=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$. 令 $y''=0$, 得 $x_1=-1,x_2=1$.

因为当 $-1<x<1$ 时, $y''>0$; 当 $x<-1$ 及 $x>1$ 时, $y''<0$, 所以曲线在 $[-1,1]$ 内是凹的; 在 $(-\infty,-1]$ 及 $[1,+\infty)$ 内是凸的; 拐点为 $(-1,\ln 2)$ 及 $(1,\ln 2)$.

(5) $y'=\mathrm{e}^{\arctan x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$, $y''=\dfrac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}(1-2x)$. 令 $y''=0$, 得 $x=\dfrac{1}{2}$.

因为当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时, $y''>0$; 当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时, $y''<0$, 所以曲线在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ 内是凹的; 在 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 内是凸的; 拐点为 $\left(\dfrac{1}{2},\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$.

(6) $y'=4x^3(12\ln x-7)+12x^3$, $y''=144x^2\ln x$. 令 $y''=0$, 得 $x=1$.

因为当 $0<x<1$ 时, $y''<0$; 当 $x>1$ 时, $y''>0$, 所以曲线在 $(0,1]$ 内是凸的; 在 $[1,+\infty)$ 内是凹的; 拐点为 $(1,-7)$.

11. 利用函数图形的凹凸性, 证明下列不等式.

(1) $\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$ $(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$;　(2) $\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}>\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$ $(x\neq y)$;

(3) $x\ln x+x\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$ $(x>0,y>0,x\neq y)$

证明 (1) 设 $f(t)=t^n$, 则 $f'(t)=nt^{n-1}$, $f''(t)=n(n-1)t^{n-2}$. 因为当 $t>0$ 时, $f''(t)>0$, 所以曲线 $f(t)=t^n$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是凹的. 由凹凸性定义, 对任意的 $x>0$, $y>0$, $x\neq y$ 有 $\dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$, 即 $\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$.

(2) 设 $f(t)=\mathrm{e}^t$, 则 $f'(t)=\mathrm{e}^t$, $f''(t)=\mathrm{e}^t$. 因为 $f''(t)>0$, 所以曲线 $f(t)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的. 由凹凸性定义, 对任意的 x, y, $x\neq y$ 有 $\dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$, 即 $\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}>\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$.

(3) 设 $f(t)=t\ln t$, 则 $f'(t)=1+\ln t$, $f''(t)=\dfrac{1}{t}$. 因为当 $t>0$ 时, $f''(t)>0$, 所以曲线 $f(t)$ 在

区间 $(0,+\infty)$ 内是凹的．由凹凸性定义，对任意的 $x>0,\ y>0,\ x\neq y$ 有 $\frac{1}{2}\left[f(x)+f(y)\right]>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$，即 $x\ln x+x\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$．

***12**．试证明曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上．

证明　$y'=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$，$y''=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}=\frac{2(x+1)\left[x-(2-\sqrt{3})\right]\left[x-(2+\sqrt{3})\right]}{(x^2+1)^3}$．

令 $y''=0$，得 $x_1=-1, x_2=2-\sqrt{3}$，$x_3=2+\sqrt{3}$．

因为当 $x<-1$ 及 $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ 时，$y''<0$；当 $-1<x<2-\sqrt{3}$ 及 $x>2+\sqrt{3}$ 时，$y''>0$，所以曲线在 $(-\infty,-1]$ 及 $\left[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right]$ 内是凸的；在 $(-1,2-\sqrt{3})$ 及 $[2+\sqrt{3},+\infty)$ 内是凹的．因此曲线拐点为 $(-1,-1)$，$\left(2-\sqrt{3},\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right)$ 及 $\left(2+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$．

因为 $\dfrac{\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}-(-1)}{2-\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4}$，$\dfrac{\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}-(-1)}{2+\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4}$，所以这三个拐点在一条直线上．

13．问 a，b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点?

解　$y'=3ax^2+2bx$，$y''=6ax+2b$．要使 $(1,3)$ 成为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，必须 $y(1)=3$ 且 $y'(1)=0$，即 $a+b=3$ 且 $6a+2b=0$，解此方程组得 $a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$．

可以验证 $a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$ 时，点 $(1,3)$ 为曲线的拐点．

14．试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a,b,c,d，使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线，$(1,-10)$ 为拐点，且点 $(-2,44)$ 在曲线上．

解　$y'=3ax^2+2bx+c$，$y''=6ax+2b$．依条件有

$$\begin{cases}y(-2)=44\\ y(1)=-10\\ y'(-2)=0\\ y''(1)=0\end{cases}，\text{即}\begin{cases}-8a+4b-2c+d=44\\ a+b+c+d=-10\\ 12a-4b+c=0\\ 6a+2b=0\end{cases}.$$

解此方程组得 $a=1$，$b=-3$，$c=-24$，$d=16$．

可以验证 $a=1$，$b=-3$，$c=-24$，$d=16$ 时，点 $(1,-10)$ 为曲线的拐点．

15．试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值，使曲线的拐点处的法线通过原点．

解　$y'=4kx^3-12kx$，$y''=12k(x-1)(x+1)$．令 $y''=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=1$．

因为当 $-1<x<1$ 时，$y''<0$；当 $x<-1$ 及 $x>1$ 时，$y''>0$，所以曲线在 $\left[-1,1\right]$ 内是凸的；在 $(-\infty,-1]$ 及 $[1,+\infty)$ 内是凹的；拐点为 $(-1,4k)$ 及 $(1,4k)$．

又因为 $y'(-1)=8k$，所以过拐点 $(-1,4k)$ 的法线方程为 $y-4k=-\dfrac{1}{8k}(x+1)$. 要使法线过原点，则 $(0,0)$ 应满足法线方程，即 $-4k=-\dfrac{1}{8k}$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

同理，因为 $y'(1)=-8k$，所以过拐点 $(1,4k)$ 的法线方程为 $y-4k=\dfrac{1}{8k}(x-1)$. 要使法线过原点，则 $(0,0)$ 应满足法线方程，即 $-4k=-\dfrac{1}{8k}$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

因此当 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ 时，该曲线的拐点处的法线通过原点.

***16.** 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数，如果 $f''(x_0)=0$，而 $f'''(x_0)\neq 0$，试问 $(x_0,f(x_0))$ 是否为拐点？为什么？

解 不妨设 $f'''(x_0)>0$. 由 $f'''(x)$ 的连续性，存在 x_0 的某一邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，在此邻域内有 $f'''(x)>0$. 设 x 为该邻域内的任意一点，由拉格朗日中值定理，有

$f''(x)-f''(x_0)=f'''(\xi)(x-x_0)$（其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间），即 $f''(x)=f'''(\xi)(x-x_0)$.

因此当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f''(x)<0$；当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f''(x)>0$，所以 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点.

习题 3-5

1. 求函数的极值.

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$；　(2) $y=x-\ln(1+x)$；　(3) $y=-x^4+2x^2$；

(4) $y=x+\sqrt{1-x}$；　(5) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$；　(6) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$；

(7) $y=\mathrm{e}^x\cos x$；　(8) $y=x^{\frac{1}{x}}$；　(9) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$；　(10) $y=x+\tan x$.

解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$y'=6x^2-12x-18=6(x^2-2x-3)=6(x-3)(x+1)$，驻点为 $x_1=-1,x_2=3$.

列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	极大值 17	↘	极小值 −47	↗

可见函数在 $x=-1$ 处取得极大值17，在 $x=3$ 处取得极小值 -47.

(2) 函数的定义域为 $(-1,+\infty)$，$y'=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$，驻点为 $x=0$. 因为当 $-1<x<0$ 时，$y'<0$；当 $x>0$ 时，$y'>0$，所以函数在 $x=0$ 处取得极小值，极小值为 $y(0)=0$.

(3) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$y'=-4x^3+4x=-4x(x^2-1), y''=-12x^2+4$，令 $y'=0$，得 $x_1=0,x_2=-1,x_3=1$.

因为 $y''(0)=4>0, y''(-1)=-8<0, y''(1)=-8<0,$ 所以 $y(0)=0$ 是函数的极小值，$y(-1)=1$ 和 $y(1)=1$ 是函数的极大值.

(4) 函数的定义域为 $(-\infty,1]$，$y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{3-4x}{2\sqrt{1-x}(2\sqrt{1-x}+1)}$，令 $y'=0$，得

驻点 $x=\frac{3}{4}$. 因为当 $x<\frac{3}{4}$ 时, $y'>0$; 当 $\frac{3}{4}<x<1$ 时, $y'<0$, 所以 $y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$ 为函数的极大值.

(5) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $y'=\frac{-5\left(x-\frac{12}{5}\right)}{\sqrt{(4+5x^2)^3}}$, 驻点为 $x=\frac{12}{5}$.

因为当 $x<\frac{12}{5}$ 时, $y'>0$; 当 $x>\frac{12}{5}$ 时, $y'<0$, 所以函数在 $x=\frac{12}{5}$ 处取得极大值, 极大值为 $y\left(\frac{12}{5}\right)=\frac{\sqrt{205}}{10}$.

(6) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $y'=\frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$, 驻点为 $x_1=0,x_2=-2$.

列表

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	极小值 $\frac{8}{3}$	↗	极大值 4	↘

可见函数在 $x=-2$ 处取得极小值 $\frac{8}{3}$, 在 $x=0$ 处取得极大值 4.

(7) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$y'=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x),y''=-\mathrm{e}^x\sin x.$$

令 $y'=0$, 得驻点 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$, $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

因为 $y''\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)<0$, 所以 $y\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是函数的极大值.

因为 $y''\left[\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right]>0$, 故 $y\left(\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi\right)=-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是函数的极小值.

(8) 函数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $y'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$.

令 $y'=0$, 得驻点 $x=\mathrm{e}$.

因为当 $x<\mathrm{e}$ 时, $y'>0$; 当 $x>\mathrm{e}$ 时, $y'<0$, 所以 $y(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 为函数 $f(x)$ 的极大值.

(9) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $y'=-\frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)^{2/3}}$, 因为 $y'<0$, 所以函数在 $(-\infty,+\infty)$ 是单调减少的, 无极值.

(10) 函数 $y=x+\tan x$ 的定义域为 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

因为 $y'=1+\sec^2x>0$, 所以函数 $f(x)$ 无极值.

2. 试证明: 如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$, 那么该函数没有极值.

证明 $y'=3ax^2+2bx+c$. 由 $b^2-3ac<0$, 知 $a\neq0$. 于是配方得到

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 3a\left(x^2 + \frac{2b}{3a}x + \frac{c}{3a}\right) = 3a\left(x^2 + \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{3ac - b^2}{3a},$$

因 $b^2 - 3ac < 0$，所以当 $a > 0$ 时，$y' > 0$；当 $a < 0$ 时，$y' < 0$．因此 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 是单调函数，没有极值.

3. 试问 a 为何值时，函数 $f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值？它是极大值还是极小值？并求此极值.

解 $f'(x) = a\cos x + \cos 3x, f''(x) = -a\sin x - 3\sin x$.

要使函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值，必有 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$，即 $a \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$，$a = 2$.

当 $a = 2$ 时，$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$．因此，当 $a = 2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值，而且取得极大值，极大值为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$，$f^{(n)}(x_0) \neq 0$，证明:

(1) 当 n 为奇数时，$f(x)$ 在 x_0 处不取得极值;

(2) 当 n 为偶数时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极值，且当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值，当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值.

证明 由含佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式及已知条件，得

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

即 $f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$，由此式可知 $f(x) - f(x_0)$ 在 x_0 某邻域内的符号由 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 在 x_0 某邻域内的符号决定.

(1) 当 n 为奇数时，$(x - x_0)^n$ 在 x_0 两侧异号，所以 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 在 x_0 两侧异号，从而 $f(x) - f(x_0)$ 在 x_0 两侧异号，故 $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值.

(2) 当 n 为偶数时，在 x_0 两侧 $(x - x_0)^n > 0$，若 $f^{(n)}(x_0) < 0$，则 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n < 0$，从而 $f(x) - f(x_0) < 0$，即 $f(x) < f(x_0)$，故 $f(x_0)$ 为极大值；若 $f^{(n)}(x_0) > 0$，则 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n > 0$，从而 $f(x) - f(x_0) > 0$，即 $f(x) > f(x_0)$，故 $f(x_0)$ 为极小值.

5. 试利用习题 4 的结论，讨论函数 $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ 的极值.

解 $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x$，$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x$，

$$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x, \quad f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x,$$

故 $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$，$f^{(4)}(0) = 4 > 0$，因此函数在 $x = 0$ 处有极小值，极小值为 4.

6. 求下列函数的最大值、最小值.

(1) $y = 2x^3 - 3x^2, -1 \leqslant x \leqslant 4$； (2) $y = x^4 - 8x^2 + 2, -1 \leqslant x \leqslant 3$； (3) $y = x + \sqrt{1-x}$，$-5 \leqslant x \leqslant 1$.

解 (1) 函数在$[-1,4]$上可导，且 $y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$，令 $y' = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = 1$. 计算函数值得

$$y(-1) = -5, y(0) = 0, y(1) = -1, y(4) = 80,$$

经比较得出函数的最小值为 $y(-1) = -5$，最大值为 $y(4) = 80$.

(2) 函数在$[-1,3]$上可导，且 $y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$，令 $y' = 0$，得

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \text{（舍去）}, \ x_3 = 2.$$

计算函数值得 $y(-1) = -5, y(0) = 2, y(2) = -14, y(3) = 11$，经比较得出函数的最小值为 $y(2) = -14$，最大值为 $y(3) = 11$.

(3) 函数在$[-5,1)$上可导，且 $y' = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$，令 $y' = 0$，得 $x = \dfrac{3}{4}$. 计算函数值得

$$y(-5) = -5 + \sqrt{6}, y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}, \ y(1) = 1..$$

经比较得出函数的最小值为 $y(-5) = -5 + \sqrt{6}$，最大值为 $y\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{5}{4}$.

7. 问函数 $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7(1 \leqslant x \leqslant 4)$ 在何处取得最大值？并求出它的最大值.

解 函数在$[1,4]$上可导，且 $y' = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x-3)(x+1)$，函数 $f(x)$ 在$1 \leqslant x \leqslant 4$ 内的驻点为 $x = 3$. 比较函数值:

$$f(1) = -29, f(3) = -61, f(4) = -47,$$

函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最大值，最大值为 $f(1) = -29$.

8. 问函数 $y = x^2 - \dfrac{54}{x}$ $(x < 0)$ 在何处取得最小值?

解 $y' = 2x - \dfrac{54}{x^2}$，在 $(-\infty, 0)$ 的驻点为 $x = -3$. 因为

$$y'' = 2 - \frac{108}{x^3}, y''(-3) = 2 + \frac{108}{27} > 0,$$

所以函数在 $x = -3$ 处取得极小值. 又因为驻点只有一个，所以这个极小值也就是最小值，即函数在 $x = -3$ 处取得最小值，最小值为 $y(-3) = 27$.

9. 问函数 $y = \dfrac{x}{x^2+1}(x \geqslant 0)$ 在何处取得最大值?

解 $y' = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. 函数在 $(0, +\infty)$ 内的驻点为 $x = 1$. 因为当 $0 < x < 1$ 时，$y' > 0$；当 $x \geqslant 1$ 时 $y' < 0$，所以函数在 $x = 1$ 处取得极大值. 又因为函数在 $(0, +\infty)$ 内只有一个驻点，所以此极大值也是函数的最大值，即函数在 $x = 1$ 处取得最大值，最大值为 $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

10. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋，现有存砖只够砌20 m 长的墙壁，问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

解 设宽为 x，长为 y，则 $2x+y=20, y=20-2x$，于是面积为

$$s=xy=x(20-2x)=20x-2x^2.$$

$$s'=20-4x=4(10-x), s''=-4.$$

令 $s'=0$，得唯一驻点 $x=5$．因为 $s''(10)-4<0$，所以 $x=5$ 为极大值点，从而也是最大值点. 故当宽为 5 m, 长为 10 m 时这间小屋面积最大.

11. 要造一圆柱形油罐，体积为 V，问底半径 r 和高 h 等于多少时，才能使表面积最小？这时底直径与高的比是多少?

解 由 $V=\pi r^2 h$，得 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$．于是油罐表面积为

$$s=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2V}{r}(0<x<+\infty),$$

$$S'=4\pi r-\frac{2V}{r^2}.\ 令\ s'=0，得驻点\ r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

因为 $S''=4\pi-\dfrac{4V}{r^3}>0$，所以 s 在驻点 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 处取得极小值，也就是最小值. 这时相应的高为 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=2r$．底直径与高的比为 $2r:h=1:1$.

12. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆（如图 3-3 所示），截面的面积为 5m^2，问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省?

解 设矩形高为 h，截面的周长 S，则 $xh+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\pi=5$，$h=\dfrac{5}{x}-\dfrac{\pi}{8}x$．于是

$$S=x+2h+\frac{x\pi}{2}=x+\frac{\pi}{4}x+\frac{10}{x}\left(0<x<\sqrt{\frac{40}{\pi}}\right),$$

$$S'=1+\frac{\pi}{4}-\frac{10}{x^2}.\ 令\ s'=0，得唯一驻点\ x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}.$$

因为 $S''=\dfrac{20}{x^3}>0$，所以 $x=\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$ 为极小值点，同时也是最小值点.

因此底宽为 $x=\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$ 时所用的材料最省.

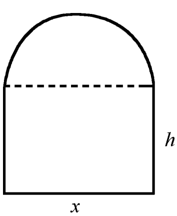


图 3-3

13. 设有质量为 5 kg 的物体，置于水平面上，受力 F 的作用而开始移动（如图 3-4 所示）．设摩擦系数 $\mu=0.25$，问力 F 与水平线的交角为多少时，才可使力 F 的大小为最小?

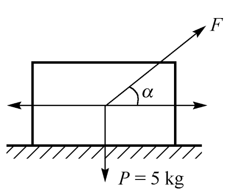


图 3-4

解 由 $F\cos\alpha=(m-F\sin\alpha)\mu$ 得

$$F=\frac{\mu m}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right),\quad F'=\frac{\mu m(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)^2},$$

驻点为 $\alpha = \arctan\mu$.

因为 F 的最小值一定在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内取得，而 F 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内只有一个驻点 $\alpha = \arctan\mu$ ，所以 $\alpha = \arctan\mu$ 一定也是 F 的最小值点. 从而当 $\alpha = \arctan 0.25 = 14^\circ$ 时，力 F 最小.

14. 有一杠杆，支点在它的一端. 在距支点 0.1m 处挂一质量为 49 kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平（如图 3-5 所示）. 如果杠杆的线密度为 5 kg/m，求最省力的杆长.

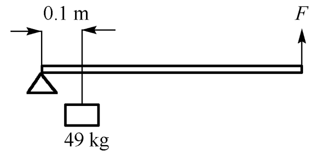


图 3-5

解 设杆长为 x m，加于杠杆一端的力为 F，则有

$xF = \dfrac{1}{2}x\cdot 5gx + 49g\cdot 0.1$，即 $F = \dfrac{5}{2}gx + \dfrac{4.9}{x}g\ (x>0)$.

$$F' = \frac{5}{2}g - \frac{4.9}{x^2}g ,$$

驻点为 $x = 1.4$. 由问题的实际意义知，F 的最小值一定在 $(0,+\infty)$ 内取得，而 F 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个驻点 $x = 1.4$，所以 F 一定在 $x = 1.4$ m 处取得最小值，即最省力的杆长为 $x = 1.4$ m .

15. 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一漏斗（如图3-6所示），问留下的扇形的中心角取多大时，做成的漏斗的容积最大?

解 漏斗的底周长 l 、底半径 r 、高 h 分别为

$$l = R\varphi ,\quad r = \frac{R\varphi}{2\pi}, h = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \varphi^2} .$$

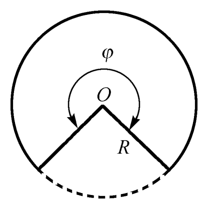


图 3-6

漏斗的容积为

$$V = \frac{1}{3}hr^2\pi = \frac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - \varphi^2} \quad (0 < \varphi < 2\pi) .$$

$$V' = \frac{R^3}{24\pi^2}\frac{\varphi(8\pi^2 - 3\varphi^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}} ,\text{驻点为 } \varphi = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi .$$

由问题的实际意义，V 一定在 $(0,2\pi)$ 内取得最大值，而 V 在 $(0,2\pi)$ 内只有一个驻点，所以该驻点一定也是最大值点. 因此当 $\varphi = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，漏斗的容积最大.

16. 某吊车的车身高 1.5m，吊臂长 15m. 现在要把一个 6m 宽、2m 高的屋架，水平地吊到 6m 高的柱子上去（如图 3-7 所示），问能否吊得上去?

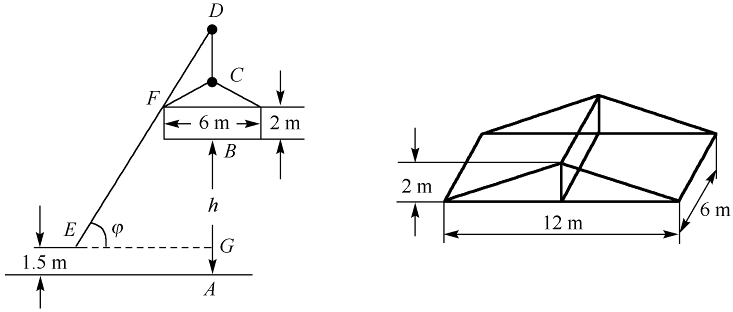


图 3-7

解 设吊臂对地面的倾角为 φ 时，屋架能够吊到的最大高度为 h．在直角三角形 ΔEDG 中，$15\sin\varphi=(h-1.5)+2+3\tan\varphi$，故 $h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\dfrac{1}{2}$，$h'=15\sin\varphi-\dfrac{3}{\cos^2\varphi}$．令 $h'=0$ 得唯一驻点 $\varphi=\arccos\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}\approx 54^\circ$．

因为 $h''=-15\sin\varphi-\dfrac{6\sin\varphi}{\cos^3\varphi}<0$，所以 $\varphi=54^\circ$ 为极大值点，同时这也是最大值点．当 $\varphi=54^\circ$ 时，$h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\dfrac{1}{2}\approx 7.5\text{m}$．

所以把此屋最高能水平地吊至 7.5 m 高，现只要求水平地吊到 6 m 处，当然能吊上去．

17. 一房地产公司有 50 套公寓要出租．当月租金定为 1000 元时，公寓会全部租出去．当月租金每增加 50 元时，就会多一套公寓租不出去，而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费．试问房租定为多少可获最大收入？

解 房租定为 x 元，纯收入为 R 元．

当 $x\leqslant 1000$ 时，$R=50x-50\times 100=50x-5000$，且当 $x=1000$ 时，得最大纯收入 45000 元．

当 $x>1000$ 时，$R=\left(50-\dfrac{x-1000}{50}\right)(x-100)=-\dfrac{1}{50}x^2+72x-7000$．

$$R'=-\frac{1}{25}x+72.$$

令得 $R'=0$ 得 $(1000,+\infty)$ 内唯一驻点 $x=1800$．因为 $R''=-\dfrac{1}{25}<0$，所以 $x=1800$ 为极大值点，同时也是最大值点．最大值为 $R=57800$．

因此，房租定为 1800 元可获最大收入．

18. 已知制作一个背包的成本为 40 元．如果每个背包的售出价为 x 元，售出的背包数由

$$n=\frac{a}{x-40}+b(80-x)$$

给出，其中 a,b 为正常数．问什么样的售出价格能带来最大利润？

解 设利润函数为 $p(x)$，则

$$p(x)=(x-40)n=a+b(x-40)(80-x).$$

$$p'(x)=b(120-2x),$$

令 $p'(x)=0$，得 $x=60$（元）．

由 $p''(x)=-2b<0$ 知，$x=60$ 为极大值点，又因为驻点唯一，故 $x=60$ 为最大值点，即售出价格为 60 元时能带来最大利润．

习题 3-6

描绘下列函数的图形．

1. $y=\dfrac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$．

解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$．

(2) $y'=\dfrac{1}{5}(4x^3-12x+8)=\dfrac{4}{5}(x+2)(x-1)^2$，　$y''=\dfrac{4}{5}(3x^2-3)=\dfrac{12}{5}(x+1)(x-1)$，

令 $y'=0$，得 $x=-2, x=1$；令 $y''=0$，得 $x=-1, x=1$.

(3) 列表

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$ 的图形	◟	$-\frac{17}{5}$ 极小值	◞	$-\frac{6}{5}$ 拐点	◜	2 拐点	◞

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.

(5) 由 $y|_{x=-2}=-\dfrac{17}{5}$, $y|_{x=-1}=-\dfrac{6}{5}$, $y|_{x=1}=2$, $y|_{x=0}=\dfrac{7}{5}$ 得图形上的四个点:

$$\left(-2,-\frac{17}{5}\right),\ \left(-1,-\frac{6}{5}\right),\ (1,2),\ \left(0,\frac{7}{5}\right).$$

(6) 画出函数的图形如图 3-8 所示.

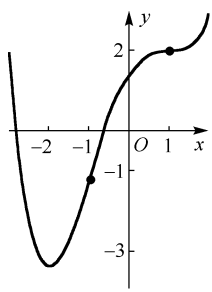


图 3-8

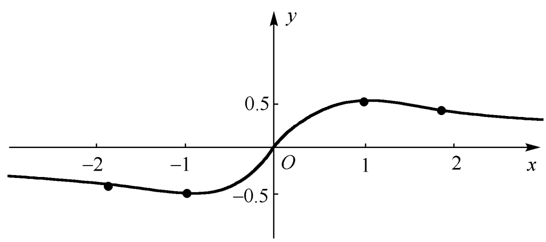


图 3-9

2. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 函数是奇函数，图形关于原点对称，故只讨论当 $x\geqslant 0$ 时函数的图形，再根据对称性作出当 $x\leqslant 0$ 时函数的图形.

(3) $y'=\dfrac{-(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$，$y''=\dfrac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$，

当 $x\geqslant 0$ 时，令 $y'=0$，得 $x=1$；令 $y''=0$，得 $x=0$，$x=\sqrt{3}$.

(4) 列表

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$y=f(x)$ 的图形	0 拐点	◜	$\frac{1}{2}$ 极大值	◝	$\frac{\sqrt{3}}{4}$ 拐点	◟

(5) 由 $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$ 知，函数有一条水平渐近线 $y=0$.

由 $y|_{x=0}=0$, $y|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$, $y|_{x=\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 得图形上的三个点: $(0,0)$，$\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

(6) 画出函数的图形如图 3-9 所示.

3. $y = \mathrm{e}^{-(x-1)^2}$.

解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$;

(2) $y' = -2(x-1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$, $y'' = 4\left(x-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$,

令 $y'=0$, 得 $x=1$; 令 $y''=0$, 得 $x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) 列表

x	$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$	1	$\left(1,1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−	−	0	+
$y=f(x)$ 的图形	╯	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 拐点	╭	1 极大值	╮	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 拐点	╰

(4) 由 $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$ 知, 函数有一条水平渐近线 $y=0$.

由 $y\big|_{x=0} = \mathrm{e}^{-1}$, $y\big|_{x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, $y\big|_{x=1} = 1$, $y\big|_{x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

得图形上的四个点:

$(0,\mathrm{e}^{-1})$, $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$, $(1,1)$, $\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2},\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$.

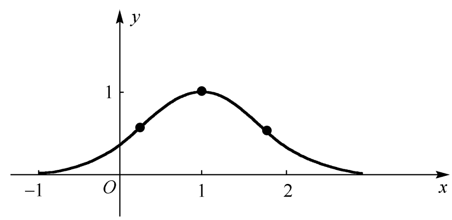


图 3-10

(5) 画出函数的图形如图 3-10 所示.

4. $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(2) $y' = 2x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^3-1}{x^2}$, $y'' = 2 + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2(x^3+1)}{x^3}$,

令 $y'=0$, 得 $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 令 $y''=0$, 得 $x=-1$.

(3) 列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)$
y'	−	−	−	无	−	0	+
y''	+	0	−	无	+	+	+
$y=f(x)$ 的图形	╰	0 拐点	╮	无	╰	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ 极小值	╯

(4) 由 $\lim\limits_{x\to 0} y = \infty$ 知, 函数有一条铅直渐近线 $x=0$.

(5) 由 $y\big|_{x=-1} = 0$, $y\big|_{x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ 得图形上的两个点: $(-1,0)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$.

(6) 画出函数的图形如图 3-11 所示.

5. $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$.

解 (1) 函数的定义域为 $x\neq\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(2) 函数是偶函数，周期函数，周期为 2π .可先作 $[0,\pi]$ 上的图形，再根据对称性作出 $[-\pi,0]$ 内的图形，最后根据周期性作出 $[-\pi,\pi]$ 以外的图形.

(3) $y'=\dfrac{\sin x(3-2\sin^2 x)}{\cos^2 2x}$， $y''=\dfrac{\cos x\cdot(3+12\sin^2 x-4\sin^4 x)}{\cos^3 2x}$，

在 $[0,\pi]$ 上，令 $y'=0$，得 $x=0$， $x=\pi$ ；令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

(4) 列表

x	0	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$	π
y'	0	+	无	+	+	+	无	+	0
y''	+	+	无	−	0	+	无	−	−
$y=f(x)$	1 极小值	╯	无	╭	0 拐点	╯	无	╭	−1 极大值

(5) 由 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} y=\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}} y=\infty$ 知，图形有两条铅直渐近线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

由 $y\big|_{x=0}=1,\ y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$ 得图形上的两个点：$(1,0)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

(6) 利用图形的对称性、周期性，便可画出函数的图形如图 3-12 所示.

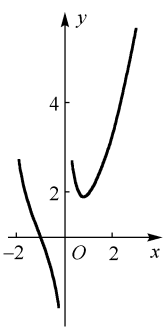


图 3-11

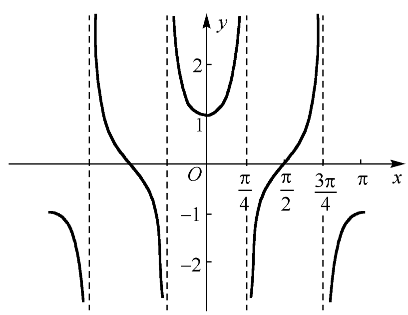


图 3-12

习题 3-7

1. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点 $(0,2)$ 处的曲率.

解 方程 $4x^2+y^2=4$ 两边分别对 x 求导数得

$$8x+2yy'=0,\quad y'=-\frac{4x}{y},\quad y''=-\frac{4y-4xy'}{y^2}.\qquad y'\big|_{(0,2)}=0,\quad y''\big|_{(0,2)}=-2.$$

所求曲率为 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\dfrac{|-2|}{(1+0^2)^{3/2}}=2$.

2. 求曲线 $y=\ln\sec x$ 在点 (x,y) 处的曲率及曲率半径.

解 $y' = \dfrac{1}{\sec x} \cdot \sec x \cdot \tan x = \tan x$，$y'' = \sec^2 x$.

所求曲率为 $K = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \dfrac{|\sec^2 x|}{(1+\tan^2 x)^{3/2}} = |\cos x|$，曲率半径为 $\rho = \dfrac{1}{K} = \dfrac{1}{|\cos x|} = |\sec x|$.

3. 求抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

解 $y' = 2x - 4$，$y'' = 2$.

令 $y' = 0$，得顶点的横坐标为 $x = 2$．$y'|_{x=2} = 0$，$y''|_{x=2} = 2$.

所求曲率为 $K = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \dfrac{|2|}{(1+0^2)^{3/2}} = 2$，曲率半径为 $\rho = \dfrac{1}{K} = \dfrac{1}{2}$.

4. 求曲线 $x = a\cos^3 t$，$y = a\sin^3 t$ 在 $t = t_0$ 处的曲率.

解 $y' = \dfrac{(a\sin^3 t)'}{(a\cos^3 x)'} = -\tan t$，$y'' = \dfrac{(-\tan x)'}{(a\cos^3 x)'} = \dfrac{1}{3a\sin t \cdot \cos^4 t}$.

所求曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\left|\dfrac{1}{3a\sin t \cdot \cos^4 t}\right|}{(1+\tan^2 t)^{3/2}} = \left|\frac{1}{3a\sin t\cos^3 t}\right| = \frac{2}{3|a\sin 2t|}, \quad K\Big|_{t=t_0} = \frac{2}{3|a\sin 2t_0|}.$$

5. 对数曲线 $y = \ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解 $y' = \dfrac{1}{x}$，$y'' = -\dfrac{1}{x^2}$.

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\left|-\dfrac{1}{x^2}\right|}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}, \quad \rho = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x},$$

$$\rho' = \frac{\dfrac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot x - (1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}\,(2x^2-1)}{x^2}.$$

令 $\rho' = 0$，得唯一驻点 $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因为当 $0 < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\rho' < 0$；当 $x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\rho' > 0$，所以 $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 是 ρ 的极小值点，同时也是最小值点．当 $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y = \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．因此在曲线上点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处曲率半径最小，最小曲率半径为

$$\rho\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\left[1+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

6. 证明曲线 $y = a\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ 在点 (x, y) 处的曲率半径为 $\dfrac{y^2}{a}$.

解　$y' = \mathrm{sh}\dfrac{x}{a}$，$y'' = \dfrac{1}{a}\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$. 在点 (x, y) 处的曲率半径为

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{\left(1+\mathrm{sh}^2\dfrac{x}{a}\right)^{3/2}}{\left|\dfrac{1}{a}\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}\right|} = \frac{\left(\mathrm{ch}^2\dfrac{x}{a}\right)^{3/2}}{\left|\dfrac{1}{a}\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}\right|} = a\mathrm{ch}^2\frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}.$$

7. 一飞机沿抛物线路径 $y = \dfrac{x^2}{10000}$（y 轴铅直向上，单位为 m）作俯冲飞行，在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v = 200$ m/s. 飞行员质量为 $G = 70$ kg. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

解　$y' = \dfrac{2x}{10000} = \dfrac{x}{5000}$，$y'' = \dfrac{1}{5000}$；$y'|_{x=0} = 0$，$y''|_{x=0} = \dfrac{1}{5000}$.

$\rho|_{x=0} = \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \dfrac{(1+0^2)^{3/2}}{\dfrac{1}{5000}} = 5000$. 向心力 $F = \dfrac{mV^2}{\rho} = \dfrac{70\times 200^2}{5000} = 560$ (N).

飞行员离心力及它本身的重量对座椅的压力为 $70\times 9.8 + 560 = 1246$ (N).

8. 汽车连同载重共 5 吨，在抛物线拱桥上行驶，速度为 21.6 km/h，桥的跨度为 10 m，拱的矢高为 0.25 m. 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

解　如图 3-13 取直角坐标系，设抛物线拱桥方程为 $y = ax^2$，由于抛物线过点 $(5, 0.25)$，代入方程得 $a = \dfrac{0.25}{25} = 0.01$，于是抛物线方程为 $y = 0.01x^2$.

$$y' = 0.02x,\quad y'' = 0.02.\quad \rho|_{x=0} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+0^2)^{3/2}}{0.02} = 50.$$

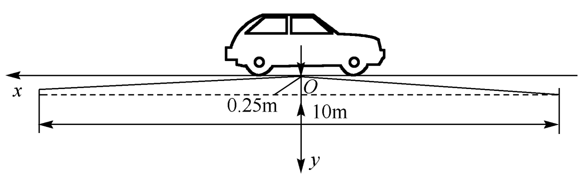


图 3-13

向心力为 $F = \dfrac{mV^2}{\rho} = \dfrac{5\times 10^3\left(\dfrac{21.6\times 10^3}{3600}\right)^2}{50} = 3600$ (N).

因为汽车重为 5 吨，所以汽车越过桥顶时对桥的压力为 $5\times 10^3 \times 9.8 - 3600 = 45400$ (N).

***9**. 求曲线 $y = \ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

解　由 $\begin{cases} y = \ln x \\ y = 0 \end{cases}$ 知，交点为 $(1,\ 0)$，即为切点.

$$y'=\frac{1}{x},\ y'(1)=1,\ y''=-\frac{1}{x^2},\ y''(1)=-1.$$

设曲线在点 $(1,\ 0)$ 处的曲率中心为 (α,β)，则

$$\alpha=\left[x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]_{(1,0)}=3,\ \beta=\left[y+\frac{1+y'^2}{y''}\right]_{(1,0)}=-2.$$

$$K\Big|_{x=1}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{x=1}=\frac{1}{\sqrt{8}}，故曲率半径 \rho=\sqrt{8}.$$

因此所求曲率圆方程为 $(x-3)^2+(y+2)^2=8$.

***10**. 求曲线 $y=\tan x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$ 处的曲率圆方程.

解 $y'=\sec^2 x$，$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$，$y''=2\sec^2 x\tan x$，$y''\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$.

设曲线在点 $(1,\ 0)$ 处的曲率中心为 (α,β)，则

$$\alpha=\left[x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]_{\left(\frac{\pi}{4},1\right)}=\frac{\pi-10}{4},\ \beta=\left[y+\frac{1+y'^2}{y''}\right]_{\left(\frac{\pi}{4},1\right)}=\frac{9}{4}.$$

$$K\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{5^{\frac{3}{2}}}，故曲率半径 \rho=\frac{5^{\frac{3}{2}}}{4}.$$

因此所求曲率圆方程为 $\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$.

***11**. 求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程.

解 因为 $2yy'=2p$ 且 $y'^2+yy''=0$，故 $y'=\frac{p}{y}$，$y''=-\frac{p^2}{y^3}$.

故抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程为

$$\begin{cases}\alpha=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}=\dfrac{3y^2}{2p}+p,\\ \beta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}=-\dfrac{y^3}{p^2},\end{cases}$$

消去 y 得所求渐屈线方程为 $27p\beta^2=8(\alpha-p)^3$. 其中直角坐标系 $\alpha O\beta$ 与直角坐标系 xOy 重合.

习题 3-8

1. 证明方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一实根，并用二分法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.

解 设函数 $f(x)=x^3-3x^2+6x-1$，显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=3>0$．由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

又 $f'(x)=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3>0$，故函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加，从而方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至多有一个实根．因此方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一实根.

现用二分法求这个实根的近似值:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0	0	0	0.125	0.125	0.157	0.173	0.180
b_n	1	0.5	0.25	0.25	0.188	0.188	0.188	0.188
中点 x_n	0.5	0.25	0.125	1.188	0.157	0.173	0.180	0.184
$f(x_n)$ 符号	+	+	−	+	−	−	−	+

故使误差不超过 0.01 的根的过剩近似值为 $\xi=0.184$.

2. 试证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有唯一实根，并用切线法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.

解 设 $f(x)=x^5+5x+1$．$f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上连续，且 $f(-1)=-5<0$，$f(0)=1>0$．由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(-1,0)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内至少有一个实根.

又 $f'(x)=5x^4+5>0$，故函数 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调增加，从而方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内至多有一个实根．因此方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有唯一实根.

现用切线法求这个实根的近似值:

由于 $f''(x)=20x^3$，$f''(-1)=-20<0$，故取 $x_0=-1$，由公式 $x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ 得

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=-0.5,\quad x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=-0.26,$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}\approx-0.20,\quad x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}\approx-0.20,$$

故使误差不超过 0.01 的近似值为 $\xi=-0.20$.

3. 用割线法求方程 $x^3+3x-1=0$ 的近似值，使误差不超过 0.01.

解 设 $f(x)=x^3+3x-1$．$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=3>0$．由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x^3+3x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

又 $f'(x)=3x^2+3>0$，故函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加，从而方程 $x^3+3x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至多有一个实根．因此方程 $x^3+3x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一实根.

现用割线法求这个实根的近似值:

由于 $f''(x)=6x$，$f''(1)=6>0$，故取 $x_0=1$，由公式 $x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ 得

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=-0.5,\quad x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\approx 0.33,$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}\approx 0.32,\quad x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}\approx 0.32,$$

故使误差不超过 0.01 的近似值为 $\xi=0.32$.

4. 求方程 $x\lg x=1$ 的近似根，使误差不超过 0.01.

解 设 $f(x)=x\lg x-1$. $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续, $f(1)=-1<0$, $f(3)=3\lg 3-1>0$. 由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(1,3)$ ，使 $f(\xi)=0$ ，即方程 $x\lg x=1$ 在区间 $(1,3)$ 内至少有一个实根.

又 $f'(x)=\lg x+\dfrac{x}{x\ln 10}>0(x\geqslant 1)$ ，故函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调增加，从而方程 $x\lg x=1$ 在区间 $(1,3)$ 内至多有一个实根. 因此方程 $x\lg x=1$ 在区间 $(1,3)$ 内有唯一实根.

现用二分法求这个实根的近似值:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	2	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
b_n	3	3	3	2.75	2.63	2.57	2.53	2.52	2.51
中点 x_n	2	2.50	2.75	2.63	2.57	2.53	2.52	2.51	2.51
$f(x_n)$ 符号	–	–	+	+	+	+	+	+	+

故使误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi=2.51$.

总习题三

1. 填空.

设常数 $k>0$ ，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为________.

解 应填写 2 . 提示: $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ， $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

在 $(0,+\infty)$ 内，令 $f'(x)=0$ 得唯一驻点 $x=\mathrm{e}$.

因为 $f''(x)<0$ ，所以曲线 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凸的，且驻点 $x=\mathrm{e}$ 一定是最大值点，最大值为 $f(\mathrm{e})=k>0$.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ ， $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ，所以曲线经过 x 轴两次，即零点的个数为 2 .

2. 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论.

(1) 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$ ，则 $f'(0)$, $f'(1)$, $f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为(　　).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(2) 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ ， $f'''(x_0)>0$ ，则(　　).

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　(D) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解 (1) 答案(B).

提示: 因为 $f''(x)>0$, 所以 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加, 又由拉格朗日中值定理, 有 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$, 其中 $\xi\in(0,1)$, 所以 $f'(1)>f'(\xi)>f'(0)$, 即 $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(2) 答案(D).

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}=f'''(x_0)>0$, 所以由极限的性质, 存在 x_0 的某个去心邻域, $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$, 在该邻域内, 当 $x>x_0$ 时, $f''(x)>0$; 当 $x<x_0$ 时, $f''(x)<0$. 所以 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

由 $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)>0$ 知, $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极小值. 因而在该去心邻域内, $f'(x)>f'(x_0)=0$, 所以 $f(x)$ 在该邻域内单调增加, 从而 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

3. 列举一个函数 $f(x)$ 满足: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内除某一点外处处可导, 但在 (a,b) 内不存在点 ξ, 使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

解 取 $f(x)=|x|$, $x\in[-1,1]$. 易知 $f(x)$ 在 $[1,1]$ 上连续, 且当 $x>0$ 时 $f'(x)=1$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)=1$, $f'(0)$ 不存在, 即 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上除 $x=0$ 外处处可导.

注意 $f(1)=f(-1)=0$, 所以要使 $f(1)-f(-1)=f'(\xi)[1-(-1)]$ 成立, 即 $f'(\xi)=0$, 是不可能的. 因此在 $(-1,1)$ 内不存在点 ξ, 使 $f(1)-f(-1)=f'(\xi)[1-(-1)]$.

4. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$, 求 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

解 根据拉格朗日中值公式, 有 $f(x+a)-f(x)=f'(\xi)a$, 其中 ξ 介于 $x+a$ 与 x 之间. 当 $x\to\infty$ 时, $\xi\to\infty$, 于是 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}f'(\xi)\cdot a=a\lim\limits_{\xi\to\infty}f'(\xi)=ak$.

5. 证明多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $[0,1]$ 上不可能有两个零点.

证明 $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$, 因为当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少. 因此 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上至多有一个零点.

或用反证法, 设多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $[0,1]$ 上有两个零点 x_1,x_2, 不妨设 $x_1<x_2$, 则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足罗尔定理, 存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$, 使 $f'(\xi)=0$. 与当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)<0$ 矛盾. 故多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $[0,1]$ 上不可能有两个零点.

6. 设 $a+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$, 证明多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

证明 设 $F(x)=a_0x+\dfrac{a_1}{2}x^2+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $F(0)=F(1)=0$. 由罗尔定理, 在 $(0,1)$ 内至少有一个点 ξ, 使 $F'(\xi)=0$. 而 $F'(x)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 在 $(0,a)$ 内可导, 且 $f(a)=0$, 证明存在一点 $\xi\in(0,a)$, 使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证明 设 $F(x)=xf(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 在 $(0,a)$ 内可导, 且 $F(0)=F(a)=0$. 由罗尔

定理，在 $(0,a)$ 内至少有一个点 ξ，使 $F'(\xi)=0$．而 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$，所以 $F'(\xi)=0$ 即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$．

***8**. 设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试利用柯西中值定理，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(a)-f(b)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$．

证明 因为函数 $f(x)$ 和 $\ln x$ 在 $\left[a,b\right]$ 上满足柯西中值定理，所以有

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\dfrac{1}{\xi}}，\text{其中 } \xi\in(a,b)，$$

即 $f(a)-f(b)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$，$\xi\in(a,b)$．

9. 设 $f(x),g(x)$ 是可导函数，且 $\left|f'(x)\right|<g'(x)$，证明当 $x>a$ 时，$\left|f(x)-f(a)\right|<g(x)-g(a)$．

证明 由条件 $\left|f'(x)\right|<g'(x)$ 得知 $\left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|<1$，且有 $g'(x)>0$，$g(x)$ 是单调增加的，当 $x>a$ 时，$g(x)>g(a)$．

因为 $f(x),g(x)$ 都是可导函数，所以 $f(x),g(x)$ 在 $[a,x]$ 上连续，在 (a,x) 内可导，根据柯西中值定理，至少存在一点 $\zeta\in(a,x)$，使 $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$．

因此，$\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\right|=\dfrac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)}=\left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|<1$，$\left|f(x)-f(a)\right|<g(x)-g(a)$．

10. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$；　(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$．

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)\Big/n\right]^{nx}$　（其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$）．

解 (1) $(x^x)'=(\mathrm{e}^{x\ln x})'=\mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$．

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-x^x)'}{(1-x+\ln x)'}=\lim_{x\to1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x-x^{x+1}(\ln x+1)}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x^{x+1}\left(\ln x+1+\dfrac{1}{x}\right)(\ln x+1)-x^x}{-1}=2.$$

(2) $$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x)+1+1}=\frac{1}{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x\left(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi}\right)}$,

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln\arctan x+\ln\dfrac{2}{\pi}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\ln\arctan x+\ln\dfrac{2}{\pi}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\arctan x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\dfrac{2}{\pi}$,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x\left(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$.

(4) 令 $y=\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)\Big/n\right]^{nx}$，则 $\ln y=nx\left[\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n\right]$,

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n\left[\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n\right]}{\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{n\left[\dfrac{1}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}\left(a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)-0\right]}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n=\ln(a_1\cdot a_2\cdots a_n).$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=\ln(a_1\cdot a_2\cdots a_n)$，从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)\Big/n\right]^{nx}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=a_1a_2\cdots a_n$.

11. 求下列函数在指定的 x_0 处具有指定阶数及余项的泰勒公式:

(1) $f(x)=x^3\ln x,x_0=1,n=4$，拉格朗日余项;

(2) $f(x)=\arctan x,x_0=0,n=3$，佩亚诺余项;

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x},x_0=0,n=3$，佩亚诺余项;

(4) $f(x)=\ln\cos x,x_0=0,n=6$，佩亚诺余项.

解 (1) $x^3\ln x=(x-1)+\dfrac{5}{2!}(x-1)^2+\dfrac{11}{3!}(x-1)^3+\dfrac{6}{4!}(x-1)^4-\dfrac{6}{5!\xi^2}(x-1)^5$，其中 ξ 介于 1 和 x_0 之间.

(2) $\arctan x=x-\dfrac{x^2}{3}+o(x^4)$.

(3) $\mathrm{e}^{\sin x}=1+\left(x-\dfrac{1}{6}x^3\right)+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^3)$.

(4) $\ln\cos x=\left(-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4-\dfrac{1}{720}x^6\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{24}x^6\right)+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{8}x^6\right)+o(x^6)$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6).$$

12. 证明下列不等式.

(1) 当 $0 < x_1 < x_2 < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1} > \dfrac{x_2}{x_1}$；

(2) 当 $x > 0$ 时，$\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x}$；

(3) 当 $\mathrm{e} < a < b < \mathrm{e}^2$ 时，$\ln^2 b - \ln^2 a > \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$

证明 (1) 令 $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$，$x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

因为 $f'(x) = \dfrac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} > \dfrac{x - \tan x}{x^2} > 0$，所以在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内 $f(x)$ 为单调增加的. 因此当 $0 < x_1 < x_2 < \dfrac{\pi}{2}$ 时有

$$\frac{\tan x_1}{x_1} < \frac{\tan x_2}{x_2}，\text{即} \frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}.$$

(2) 要证 $(1+x)\ln(1+x) > \arctan x$，即证 $(1+x)\ln(1+x) - \arctan x > 0$.
设 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，

$$f'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

因为当 $x > 0$ 时，$\ln(1+x) > 0$，$1 - \dfrac{1}{1+x^2} > 0$，所以 $f'(x) > 0$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.
因此，当 $x > 0$ 时，$f(x) > f(0)$，而 $f(0) = 0$，从而 $f(x) > 0$，即 $(1+x)\ln(1+x) - \arctan x > 0$，也就是 $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x}$.

(3) 设 $f(x) = \ln^2 x$，则 $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉格朗日中值定理，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $\ln^2 b - \ln^2 a = \dfrac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)$.

设 $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$，则 $g'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$. 当 $x > \mathrm{e}$ 时，$g'(x) < 0$，所以 $g(x)$ 在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调减少.

所以当 $\mathrm{e} < a < \xi < b < \mathrm{e}^2$ 时，$g(\xi) > g(\mathrm{e}^2)$，即 $\dfrac{\ln\xi}{\xi} > \dfrac{\ln \mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$.

因此 $\ln^2 b - \ln^2 a > \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$

13. 设 $a > 1$，$f(x) = a^x - ax$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $x(a)$. 问 a 为何值时，$x(a)$ 最小？并求出最小值.

解 $f'(x) = a^x \ln a - a$.

令 $y' = 0$，得唯一驻点 $x = \log_a \dfrac{a}{\ln a} = 1 - \dfrac{\ln\ln a}{\ln a}$.

$$x' = -\frac{\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\ln a - \frac{1}{a}\cdot\ln\ln a}{\ln^2 a} = -\frac{1-\ln\ln a}{a\ln^2 a}，\text{令 } x' = 0，\text{得唯一驻点 } a = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}.$$

因为当$1<a<\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$时，$y'<0$，当$a>\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$时，$x'>0$，所以$a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$为函数$x=1-\dfrac{\ln\ln a}{\ln a}$的极小值点，也是最小值点，且最小值为$x\big|_{a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

14. 求椭圆$x^2-xy+y^2=3$上纵坐标最大和最小的点.

解 方程$x^2-xy+y^2=3$两端分别对x求导，得$2x-y-xy'+2yy'=0$，$y'=\dfrac{2x-y}{x-2y}$. 当$x=\dfrac{1}{2}y$时，$y'=0$. 将$x=\dfrac{1}{2}y$代入椭圆方程，得$\dfrac{1}{4}y^2-\dfrac{1}{2}y^2+y^2=3$，$y=\pm 2$.
于是得驻点$x=-1,x=1$. 因为椭圆上纵坐标最大和最小的点一定存在，且在驻点处取得，又当$x=-1$时，$y=-2$，当$x=1$时，$y=2$，所以纵坐标最大和最小的点分别为$(1,2)$和$(-1,-2)$.

15. 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

解 令$f(x)=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$，则

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x,\quad \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\ln x=\frac{1}{x^2}(1-\ln x),\quad f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

令$f'(x)=0$，得唯一驻点$x=\mathrm{e}$.
因为当$0<x<\mathrm{e}$时，$f'(x)>0$; 当$x>\mathrm{e}$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(0,\mathrm{e}]$上单调增加，在$[\mathrm{e},+\infty)$上单调减少. 唯一驻点$x=\mathrm{e}$为最大值点.
因为$2<\mathrm{e}<3$，因此所求最大项为$\max\{\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3}\}=\sqrt[3]{3}$.

16. 曲线弧$y=\sin x(0<x<\pi)$上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.

解 $y'=\cos x, y''=-\sin x$,

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+\cos^2 x)^{3/2}}{\sin x}\ (0<x<\pi),$$

$$\rho'=\frac{\frac{3}{2}(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}(-2\cos x\sin x)\cdot\sin x-(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}\cos x(3\sin^2 x+\cos^2 x+1)}{\sin^2 x}.$$

在$(0,\pi)$内，令$\rho'=0$，得唯一驻点$x=\dfrac{\pi}{2}$.

因为当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\rho'<0$; 当$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$时，$\rho'>0$，所以$x=\dfrac{\pi}{2}$是ρ的极小值点，同时也是ρ的最小值点，最小值为$\rho=\dfrac{\left(1+\cos^2\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sin\dfrac{\pi}{2}}=1$.

17. 证明方程$x^3-5x-2=0$只有一个正根. 并求此正根的近似值，使其精确到10^{-3}.

解 设 $f(x)=x^3-5x-2$，则 $f'(x)=3x^2-5$.

当 $x>0$ 时，令 $y'=0$，得驻点 $x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

因为当 $0<x<\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 时，$y'<0$，所以函数在 $\left[0,\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right]$ 内单调减少. 由

$$f(0)=-2<0\,,\quad f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3-5\frac{\sqrt{5}}{3}-2=-\frac{40\sqrt{5}}{27}-2<0$$

可知方程 $x^3-5x-2=0$ 在 $\left[0,\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right]$ 内没有正根.

当 $x>\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 时，$y'>0$，在 $\left[\dfrac{\sqrt{5}}{3},+\infty\right)$ 内单调增加. 由

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3-5\frac{\sqrt{5}}{3}-2=-\frac{40\sqrt{5}}{27}-2<0\,,\quad f(3)=10>0$$

可知方程 $x^3-5x-2=0$ 在 $\left[\dfrac{\sqrt{5}}{3},3\right]$ 内有正根，且只有一个正根.

由 $f(2)=-4<0$ 知，方程 $x^3-5x-2=0$ 的正根在 $[2,3]$ 内，用二分法求该方程正根的近似值.

现用二分法求这个实根的近似值:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	2	2	2.25	2.375	2.375	2.406	2.406	2.414	2.414	2.414	2.414
b_n	3	2.5	2.5	2.5	2.438	2.438	2.422	2.422	2.418	2.416	2.415
中点 x_n	2.5	2.25	2.375	2.438	2.406	2.422	2.414	2.418	2.416	2.415	2.415
$f(x_n)$ 符号	+	–	–	+	–	+	–	+	+	+	+

故误差不超过 10^{-3} 的正根的近似值为 $\xi=2.415$.

***18**. 设 $f''(x_0)$ 存在，证明 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$.

证明 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{\left[f'(x_0+h)-f'(x_0)\right]+\left[f'(x_0)-f'(x_0-h)\right]}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f'(x_0-h)}{h}\right]=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]=f''(x_0)\,.$$

19. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且 $f''(x)\geqslant0$. 证明对于 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2 及 $0\leqslant t\leqslant1$，有 $f\left[(1-t)x_1+tx_2\right]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

证明 因为 $x_1,x_2\in(a,b)$，$0\leqslant t\leqslant1$，所以 $x_0=(1-t)x_1+tx_2\in(a,b)$.

$f(x)$ 在 x_0 点的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2 \text{（其中}\xi\text{介于}x\text{与}x_0\text{之间）}.$$

因为 $f''(x)\geqslant 0$，所以

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

因此

$$f(x_1)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0),\ f(x_2)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0).$$

于是有

$$\begin{aligned}(1-t)f(x_1)+tf(x_2)&\geqslant(1-t)f(x_0)+tf(x_0)+f'(x_0)\left[(1-t)(x_1-x_0)+t(x_2-x_0)\right]\\&=f(x_0)+f'(x_0)\left[(1-t)x_1+tx_2-x_0\right]=f(x_0)\end{aligned}$$

所以 $f\left[(1-t)x_1+tx_2\right]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$.

20. 试确定常数 a 和 b，使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的5阶无穷小.

解 由泰勒公式知

$$\begin{aligned}f(x)&=x-a\sin x-\frac{b}{2}\sin 2x\\&=x-a\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right]-\frac{b}{2}\left[2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^5)\right]\\&=(1-a-b)x+\left(\frac{a}{6}+\frac{2b}{3}\right)x^3-\left(\frac{a}{120}+\frac{2b}{15}\right)x^5+o(x^5)\end{aligned}$$

由题意，有

$$\begin{cases}1-a-b=0\\ \dfrac{a}{6}+\dfrac{2b}{3}=0\\ \dfrac{a}{120}+\dfrac{2b}{15}\neq 0\end{cases}$$

解得 $a=\frac{3}{4}, b=-\frac{1}{3}$. 所以当 $a=\frac{3}{4}, b=-\frac{1}{3}$ 时，$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的5阶无穷小.

第 4 章

不定积分

一、基 本 内 容

1. 不定积分的概念与性质
   (1) 原函数的定义;
   (2) 原函数存在定理;
   (3) 不定积分的定义;
   (4) 求导或微分运算与积分运算之间的关系;
   (5) 基本积分表;
   (6) 不定积分的性质.
2. 积分法
   (1) 第一换元法;
   (2) 第二换元法;
   (3) 分部积分法.
3. 几种特殊类型函数的积分
   (1) 有理函数的积分;
   (2) 三角函数有理式的积分;
   (3) 简单无理函数的积分.

二、基 本 要 求

1. 理解原函数与不定积分的概念, 牢记不定积分的性质.
2. 熟练掌握不定积分基本公式, 灵活应用换元积分法与分部积分法.
3. 会计算一些简单的有理函数、三角函数有理式和无理函数积分.

三、习 题 解 答

习题 4-1

1. 利用求导运算验证下列等式.

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$;　　(2) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$;

(3) $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}\mathrm{d}x = \arctan x + \frac{1}{x+1} + C$； (4) $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\tan x + \sec x| + C$；

(5) $\int x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$； (6) $\int \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C$.

解 (1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C\right] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C\right) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan x + \frac{1}{x+1} + C\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}$.

(4) 当 $\tan x + \sec x > 0$ 时，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(\tan x + \sec x) + C] = \frac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\tan x + \sec x} = \sec x$；

当 $\tan x + \sec x < 0$ 时，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(-\tan x - \sec x) + C] = \frac{-\sec^2 x - \sec x\tan x}{-\tan x - \sec x} = \sec x$.

(5) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\sin x + \cos x + C) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$.

(6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C\right] = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x) = \mathrm{e}^x\sin x$.

2. 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$； (2) $\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x$； (3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$； (4) $\int x^2\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$； (5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x}}$；

(6) $\int \sqrt[m]{x^n}\mathrm{d}x$； (7) $\int 5x^3\mathrm{d}x$； (8) $\int (x^2-3x+2)\mathrm{d}x$； (9) $\int \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}}$ （g 是常数）；

(10) $\int (x^2+1)^2\mathrm{d}x$； (11) $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)\mathrm{d}x$； (12) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(13) $\int \left(2\mathrm{e}^x + \frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$； (14) $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$； (15) $\int \mathrm{e}^x\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$；

(16) $\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$； (17) $\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$； (18) $\int \sec x(\sec x - \tan x)\mathrm{d}x$；

(19) $\int \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$； (20) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$； (21) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\mathrm{d}x$；

(22) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$； (23) $\int \cot^2 x\mathrm{d}x$； (24) $\int \cos\theta(\tan\theta + \sec\theta)\mathrm{d}\theta$；

(25) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$； (26) $\int \frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int x^{-2}\mathrm{d}x = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$.

(2) $\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$.

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C$.

(4) $\int x^2 \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{1}{\frac{7}{3}+1} x^{\frac{7}{3}+1} + C = \frac{3}{10} x^{\frac{10}{3}} + C$.

(5) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{5}{2}+1} x^{-\frac{5}{2}+1} + C = -\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} + C$.

(6) $\int \sqrt[m]{x^n} dx = \int x^{\frac{n}{m}} dx = \frac{1}{\frac{n}{m}+1} x^{\frac{n}{m}+1} + C = \frac{m}{n+m} x^{\frac{n+m}{m}} + C$.

(7) $\int 5x^3 dx = 5\int x^3 dx = \frac{5}{4} x^4 + C$.

(8) $\int (x^2 - 3x + 2) dx = \int x^2 dx - 3\int x dx + 2\int dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} x^2 + 2x + C$.

(9) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int h^{-\frac{1}{2}} dh = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot 2h^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{\frac{2h}{g}} + C$.

(10) $\int (x^2+1)^2 dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \int x^4 dx + 2\int x^2 dx + \int dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$.

(11) $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1) dx = \int (x^2 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - 1) dx = \int x^2 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx - \int dx$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - x + C.$$

(12) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}) dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx - 2\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx = 2\sqrt{x} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$.

(13) $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx = 2\int e^x dx + 3\int \frac{1}{x} dx = 2e^x + 3\ln|x| + C$.

(14) $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 3\int \frac{1}{1+x^2} dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3\arctan x - 2\arcsin x + C$.

(15) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(e^x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int e^x dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx = e^x - 2\sqrt{x} + C$.

(16) $\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C = \frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C$.

(17) $\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x} dx = \int \left[2 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^x\right] dx = 2\int dx - 5\int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = 2x - \frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}} + C = 2x - \frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln 2 - \ln 3} + C$.

(18) $\int \sec x(\sec x - \tan x) dx = \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx = \int \sec^2 x dx - \int \sec x \tan x dx = \tan x - \sec x + C$.

(19) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos x dx\right) = \frac{x + \sin x}{2} + C$.

(20) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2\cos^2 x-1}=\frac{1}{2}\int\sec^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan x+C$.

(21) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C$.

(22) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int(\csc^2 x-\sec^2 x)\mathrm{d}x=-(\cot x+\tan x)+C$.

(23) $\int\cot^2 x\mathrm{d}x=\int(\csc^2 x-1)\mathrm{d}x=-\cot x-x+C$.

(24) $\int\cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)\mathrm{d}\theta=\int(\sin\theta+1)\mathrm{d}\theta=-\cos\theta+\theta+C$.

(25) $\int\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=x-\arctan x+C$.

(26) $\int\frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{(3x^4+3x^2)-(x^2+1)+1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=x^3-x+\arctan x+C$.

3. 含有未知函数的导数的方程称为微分方程，例如方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$，其中 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 为未知函数的导数，$f(x)$ 为已知函数. 如果将函数 $y=\varphi(x)$ 代入微分方程，使微分方程成为恒等式，那么函数 $y=\varphi(x)$ 就称为该微分方程的解. 求下列微分方程满足所给条件的解.

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x-2)^2,\quad y\big|_{x=2}=0$；　　(2) $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2t}=\frac{2}{t^3},\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1}=1,\quad x\big|_{t=1}=1$.

解 (1) $y=\int(x-2)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x+C$，由 $y\big|_{x=2}=0$，可得 $C=-\frac{8}{3}$，故满足方程的解为

$$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x-\frac{8}{3}.$$

(2) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\int\frac{2}{t^3}\mathrm{d}t=-\frac{1}{t^2}+C_1$，由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1}=1$，可得 $C_1=2$，即 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{t^2}+2$，从而 $x=\int\left(-\frac{1}{t^2}+2\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{t}+2t+C_2$，又由 $x\big|_{t=1}=1$，可得 $C_2=-2$，故满足方程的解为 $x=\frac{1}{t}+2t-2$.

4. 汽车以 20m / s 的速度行驶，刹车后匀减速行驶了 50m 停住，求刹车加速度. 可执行下列步骤:

(1) 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}^2t}=-k$ 满足条件 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=20$ 及 $s\big|_{t=0}=0$ 的解;

(2) 求使 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0$ 的 t 值及相应的 s 值;

(3) 求使 $s=50$ 的 k 值.

解 (1) 由题知 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\int -k\mathrm{d}t=-kt+C_1$，由 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1}=20$ 可得 $C_1=20$，

即 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-kt+20$，从而 $s=\int(-kt+20)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}kt^2+20t+C_2$，

又由 $s\big|_{t=0}=0$ 可得 $C_2=0$，故满足方程的解为 $s=-\frac{1}{2}kt^2+20t$.

(2) 由 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0$，即 $-kt+20=0$，可得 $t=\frac{20}{k}$.

相应地由(1)知 $s=-\frac{1}{2}k\cdot\left(\frac{20}{k}\right)^2+20\cdot\frac{20}{k}=\frac{200}{k}$.

(3) 由 $s=50$，根据(2)知 $\frac{200}{k}=50$，解得 $k=4$，故刹车加速度为 $-4\mathrm{m/s^2}$.

5. 一曲线通过点 $(\mathrm{e}^2,3)$，且在任意一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

解 设所求曲线方程为 $y=f(x)$，按题设曲线上任意一点 (x,y) 处的切线斜率为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$，即 $f(x)$ 为 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数.

因为 $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$，故必有某个常数 C 使 $f(x)=\ln|x|+C$，又根据曲线过点 $(\mathrm{e}^2,3)$，代入上式得 $C=1$，于是所求曲线方程为 $y=\ln x+1$.

6. 一物体由静止开始运动，经 t 秒后的速度是 $3t^2\mathrm{m/s}$，问:

(1) 在 3 s 后物体离开出发点的距离是多少?

(2) 物体走完 360m 需要多少时间?

解 (1) 设位移函数为 $s=s(t)$，则

$$s=\int v(t)\mathrm{d}t=\int 3t^2\mathrm{d}t=t^3+C,$$

又由于物体由静止开始运动，即 $s|_{t=0}=0$，代入上式可得 $C=0$，于是位移函数为 $s=t^3$，所求距离为 $s=3^3=27(\mathrm{m})$.

(2) 由(1)知 $360=t^3$，解得 $t=\sqrt[3]{360}\approx 7.11(\mathrm{s})$.

7. 证明函数 $\arcsin(2x-1),\arccos(1-2x)$ 和 $2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 都是 $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数.

证明 因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\arcsin(2x-1)]=\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\arccos(1-2x)]=-\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(-2)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)=\frac{2}{1+\frac{x}{1-x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\cdot\frac{(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

于是原题得证.

习题 4-2

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数，使等式成立（如 $\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{d}(4x+7)$）.

(1) $\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(ax)$； (2) $\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(7x-3)$； (3) $x\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(x^2)$；

(4) $x\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(5x^2)$； (5) $x\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(1-x^2)$； (6) $x^3\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(3x^4-2)$；

(7) $e^{2x}dx = \quad d(e^{2x})$; (8) $e^{-\frac{x}{2}}dx = \quad d\left(1+e^{-\frac{x}{2}}\right)$; (9) $\sin\frac{3}{2}xdx = \quad d\left(\cos\frac{3}{2}x\right)$;

(10) $\frac{dx}{x} = \quad d(5\ln|x|)$; (11) $\frac{dx}{x} = \quad d(3-5\ln|x|)$; (12) $\frac{dx}{1+9x^2} = \quad d(\arctan 3x)$;

(13) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \quad d(1-\arcsin x)$; (14) $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \quad d(\sqrt{1-x^2})$.

解 (1) 由 $d(ax)=adx$ 得 $dx=\frac{1}{a}d(ax)$;

(2) 由 $d(7x-3)=7dx$ 得 $dx=\frac{1}{7}d(7x-3)$;

(3) 由 $d(x^2)=2xdx$ 得 $xdx=\frac{1}{2}d(x^2)$;

(4) 由 $d(5x^2)=10xdx$ 得 $xdx=\frac{1}{10}d(5x^2)$;

(5) 由 $d(1-x^2)=-2xdx$ 得 $xdx=-\frac{1}{2}d(1-x^2)$;

(6) 由 $d(3x^4-2)=12x^3dx$ 得 $x^3dx=\frac{1}{12}d(3x^4-2)$;

(7) 由 $d(e^{2x})=2e^{2x}dx$ 得 $e^{2x}dx=\frac{1}{2}d(e^{2x})$;

(8) 由 $d\left(1+e^{-\frac{x}{2}}\right)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx$ 得 $e^{-\frac{x}{2}}dx=-2d\left(1+e^{-\frac{x}{2}}\right)$;

(9) 由 $d\left(\cos\frac{3}{2}x\right)=-\frac{3}{2}\sin\frac{3}{2}xdx$ 得 $\sin\frac{3}{2}xdx=-\frac{2}{3}d\left(\cos\frac{3}{2}x\right)$;

(10) 由 $d(5\ln|x|)=5\frac{dx}{x}$ 得 $\frac{dx}{x}=\frac{1}{5}d(5\ln|x|)$;

(11) 由 $d(3-5\ln|x|)=-5\frac{dx}{x}$ 得 $\frac{dx}{x}=-\frac{1}{5}d(3-5\ln|x|)$;

(12) 由 $d(\arctan 3x)=\frac{3dx}{1+9x^2}$ 得 $\frac{dx}{1+9x^2}=\frac{1}{3}d(\arctan 3x)$;

(13) 由 $d(1-\arcsin x)=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 得 $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-d(1-\arcsin x)$;

(14) 由 $d(\sqrt{1-x^2})=-\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ 得 $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-d(\sqrt{1-x^2})$.

2. 求下列不定积分（其中 a,b,ω,φ 均为常数）.

(1) $\int e^{5t}dt$; (2) $\int(3-2x)^3dx$; (3) $\int\frac{dx}{1-2x}$;

(4) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$; (5) $\int(\sin ax-e^{\frac{x}{b}})dx$; (6) $\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$;

(7) $\int xe^{-x^2}dx$; (8) $\int x\cos(x^2)dx$; (9) $\int\frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx$;

(10) $\int\frac{3x^3}{1-x^4}dx$; (11) $\int\frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$; (12) $\int\cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dt$;

(13) $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$; (14) $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$; (15) $\int\tan^{10}x\cdot\sec^2 xdx$;

(16) $\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$; (17) $\int\frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$; (18) $\int\frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(19) $\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$; (20) $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$; (21) $\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$;

(22) $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$; (23) $\int\frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$; (24) $\int\cos^3 xdx$;

(25) $\int\cos^2(\omega t+\varphi)dt$; (26) $\int\sin 2x\cos 3xdx$; (27) $\int\cos x\cos\frac{x}{2}dx$;

(28) $\int\sin 5x\sin 7xdx$; (29) $\int\tan^3 x\sec xdx$; (30) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

(31) $\int\frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$; (32) $\int\frac{x^3}{9+x^2}dx$; (33) $\int\frac{dx}{2x^2-1}$;

(34) $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}$; (35) $\int\frac{x}{x^2-x-2}dx$; (36) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$;

(37) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; (38) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; (39) $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$;

(40) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$; (41) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$; (42) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$;

(43) $\int\frac{x-1}{x^2+2x+3}dx$; (44) $\int\frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx$.

解 (1) 令 $u=5t$，则 $du=5dt$，即 $dt=\frac{1}{5}du$，于是 $\int e^{5t}dt=\frac{1}{5}\int e^u du=\frac{1}{5}e^u+C=\frac{1}{5}e^{5t}+C$.

(2) 令 $u=3-2x$，则 $du=-2dx$，即 $dx=-\frac{1}{2}du$，于是

$$\int(3-2x)^3dx=-\frac{1}{2}\int u^3du=-\frac{1}{8}u^4+C=-\frac{(3-2x)^4}{8}+C.$$

(3) $\int\frac{dx}{1-2x}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-2x)}{1-2x}=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

(4) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}=-\frac{1}{3}\int(2-3x)^{-\frac{1}{3}}d(2-3x)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C=-\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C$.

(5) $\int(\sin ax-e^{\frac{x}{b}})dx=\frac{1}{a}\int\sin axd(ax)-b\int e^{\frac{x}{b}}d\left(\frac{x}{b}\right)=-\frac{\cos ax}{a}-be^{\frac{x}{b}}+C$.

(6) $\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=2\int\sin\sqrt{t}d\sqrt{t}=-2\cos\sqrt{t}+C$.

(7) $\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

(8) $\int x\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int\cos(x^2)d(x^2)=\frac{1}{2}\sin(x^2)+C$.

(9) $\int\frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx=-\frac{1}{6}\int(2-3x^2)^{-\frac{1}{2}}d(2-3x^2)=-\frac{1}{6}\cdot 2(2-3x^2)^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{\sqrt{2-3x^2}}{3}+C$

(10) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx = -\frac{3}{4}\int \frac{1}{1-x^4}d(1-x^4) = -\frac{3}{4}\ln\left|1-x^4\right| + C$.

(11) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + C$.

(12) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dt = -\frac{1}{\omega}\int \cos^2(\omega t+\varphi)d[\cos(\omega t+\varphi)] = -\frac{\cos^3(\omega t+\varphi)}{3\omega} + C$.

(13) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$.

(14) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx = \int (\sin x-\cos x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x-\cos x) = \frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}} + C$.

(15) $\int \tan^{10} x\cdot\sec^2 x dx = \int \tan^{10} x d(\tan x) = \frac{\tan^{11} x}{11} + C$.

(16) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x} = \int \frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x} = \ln\left|\ln\ln x\right| + C$.

(17) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C$.

(18) $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int 10^{2\arccos x}d(2\arccos x) = -\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10} + C$.

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \tan\sqrt{1+x^2}d\sqrt{1+x^2} = -\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right| + C$.

(20) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int \arctan\sqrt{x}\cdot\frac{2d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\int \arctan\sqrt{x}d(\arctan\sqrt{x}) = (\arctan\sqrt{x})^2 + C$.

(21) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx = \int \frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2} = -\frac{1}{x\ln x} + C$.

(22) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = 2\int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \csc 2x d(2x) = \ln\left|\csc 2x-\cot 2x\right| + C = \ln\left|\tan x\right| + C$

(23) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx = \int \ln\tan x d(\ln\tan x) = \frac{(\ln\tan x)^2}{2} + C$.

(24) $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x\cdot\cos x dx = \int (1-\sin^2 x)d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

(25) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)dt = \int \frac{\cos 2(\omega t+\varphi)+1}{2}dt = \frac{1}{4\omega}\int \cos 2(\omega t+\varphi)d[2(\omega t+\varphi)] + \frac{1}{2}\int dt = \frac{\sin 2(\omega t+\varphi)}{4\omega}$

$+\frac{t}{2} + C$.

(26) $\int \sin 2x\cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x-\sin x)dx = \frac{1}{10}\int \sin 5x d(5x) - \frac{1}{2}\int \sin x dx = -\frac{1}{10}\cos 5x$

$+\frac{1}{2}\cos x + C$.

(27) $\int \cos x\cos\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{3}\int \cos\frac{3}{2}x d\left(\frac{3}{2}x\right) + \int \cos\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)$

$= \frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}x + \sin\frac{x}{2} + C$.

(28) $\int \sin 5x\sin 7x dx = -\frac{1}{2}\int (\cos 12x-\cos 2x)dx = -\frac{1}{24}\int \cos 12x d(12x)$

$$+\frac{1}{4}\int\cos 2x\mathrm{d}(2x)=-\frac{1}{24}\sin 12x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

(29) $\int\tan^3 x\sec x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}(\sec x)=\frac{1}{3}\sec^3 x-\sec x+C$.

(30) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\arctan(\mathrm{e}^x)+C$.

(31) $\int\frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}\mathrm{d}x-\int\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{2x}{3}\right)$

$$+\frac{1}{8}\int(9-4x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(9-4x^2)=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}x+\frac{\sqrt{9-4x^2}}{4}+C.$$

(32) $\int\frac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(x-\frac{9x}{9+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\int\frac{\mathrm{d}(9+x^2)}{9+x^2}=\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln(9+x^2)+C$.

(33) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2x^2-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2}x-1}-\frac{1}{\sqrt{2}x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}x-1)}{\sqrt{2}x-1}-\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}x+1)}{\sqrt{2}x+1}\right]$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right|+C.$$

(34) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(\ln|x-2|-\ln|x+1|)+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$.

(35) $\int\frac{x}{x^2-x-2}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{(x-2)(x+1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\left(\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+C$.

(36) 设 $x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t,\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，

于是 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\sin^2 t\mathrm{d}t=a^2\int\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C.$$

(37) 当 $x>1$ 时，设 $x=\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\sec^2 x-1}=\tan t,\mathrm{d}x=\sec t\tan t\mathrm{d}t$，

于是 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\sec t\tan t\mathrm{d}t}{\sec t\cdot\tan t}=\int\mathrm{d}t=t+C=\arccos\frac{1}{x}+C$；

当 $x<-1$ 时，令 $x=-u$，则 $u>1$，由上述结果可得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-1}}=\arccos\frac{1}{u}+C=\arccos\left(-\frac{1}{x}\right)+C$$

综上有 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\arccos\frac{1}{|x|}+C$.

(38) 设 $x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{(x^2+1)^3}=\sec^3 t,\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$

于是 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}=\int\frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{\sec^3 t}=\int\cos t\mathrm{d}t=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

(39) 当 $x>3$ 时，设 $x=3\sec t\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=3\sec t\tan t\mathrm{d}t$，

于是 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{3\tan t}{3\sec t}\cdot 3\sec t\tan t\mathrm{d}t=3\int\tan^2 t\mathrm{d}t=3\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t$

$$=3\tan t-3t+C=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C$$

当 $x<-3$ 时，令 $x=-u$，则 $u>3$．由上述结果可得

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{(-u)^2-9}}{-u}\mathrm{d}(-u)=\sqrt{u^2-9}-3\arccos\frac{3}{u}+C=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{-x}+C$$

综上有 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{|x|}+C$．

(40) 设 $\sqrt{2x}=t$，则 $x=\dfrac{t^2}{2}$，$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，

于是 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}=\int\frac{t\mathrm{d}t}{1+t}=\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=t-\ln|1+t|+C=\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$．

(41) 设 $x=\sin t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{1-x^2}=\cos t,\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，

于是 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{1+\cos t}=\int\left(1-\frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t=t-\int\sec^2\frac{t}{2}\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)=t-\tan\frac{t}{2}+C$

$$=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C.$$

(42) 当 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<1$ 时，设 $x=\sin t\left(-\dfrac{\pi}{4}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{1-x^2}=\cos t,\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，

于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}=\frac{1}{2}\int\frac{(\cos t-\sin t)+(\cos t+\sin t)\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}=\frac{1}{2}\left[\int\frac{\mathrm{d}(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t}+\int\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\ln|\sin t+\cos t|+t)+C=\frac{1}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|+\arcsin x\right)+C;$$

当 $-1<x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，设 $x=\sin t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<-\dfrac{\pi}{4}\right)$，计算过程与结果均同上.

综上有 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|+\arcsin x\right)+C$．

(43) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)-4}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-\int\frac{2}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|-\sqrt{2}\int\frac{1}{1+\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

(44) 设 $x=\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\tan^3 t+1}{\sec^4 t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\frac{\tan^3 t+1}{\sec^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\sin^3 t+\cos^3 t}{\cos t}\mathrm{d}t$$
$$=\int\frac{\cos^2 t-1}{\cos t}\mathrm{d}(\cos t)+\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\cos^2 t}{2}-\ln\cos t+\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C=\frac{1}{2}\left[\frac{1+x}{1+x^2}+\ln(1+x^2)+\arctan x\right]+C.$$

习题 4-3

求下列不定积分.

1. $\int x\sin x\mathrm{d}x$； 2. $\int\ln x\mathrm{d}x$； 3. $\int\arcsin x\mathrm{d}x$． 4. $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

5. $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$； 6. $\int\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$； 7. $\int\mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$； 8. $\int x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$；

9. $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$； 10. $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$； 11. $\int x^2\cos x\mathrm{d}x$； 12. $\int t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$；

13. $\int\ln^2 x\mathrm{d}x$； 14. $\int x\sin x\cos x\mathrm{d}x$； 15. $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$； 16. $\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x$；

17. $\int(x^2-1)\sin 2x\mathrm{d}x$； 18. $\int\frac{\ln^3 x}{x^2}\mathrm{d}x$； 19. $\int\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$； 20. $\int\cos\ln x\mathrm{d}x$；

21. $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$； 22. $\int\mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x$； 23. $\int x\ln^2 x\mathrm{d}x$； 24. $\int\mathrm{e}^{\sqrt{3x+9}}\mathrm{d}x$．

解 1. $\int x\sin x\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}(\cos x)=-[x\cos x-\int\cos x\mathrm{d}x]=-x\cos x+\sin x+C$．

2. $\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\mathrm{d}\ln x=x\ln x-\int\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$．

3. $$\int\arcsin x\mathrm{d}x=x\arcsin x-\int x\mathrm{d}\arcsin x=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)\ =x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

4. $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-(x\mathrm{e}^{-x}-\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x)=-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+C$．

5. $\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\ln x\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\int x^3\mathrm{d}\ln x\right)=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\int x^2\mathrm{d}x\right)=\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{x^3}{9}+C$．

6. $$\int\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(\sin x)=\mathrm{e}^{-x}\sin x-\int\sin x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=\mathrm{e}^{-x}\sin x+\int\sin x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$
$$=\mathrm{e}^{-x}\sin x-\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(\cos x)\ =\mathrm{e}^{-x}\sin x-\left[\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\cos x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})\right]$$
$$=\mathrm{e}^{-x}\sin x-\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$$

移项整理得 $\int\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x-\cos x)+C$．

7. $\int \mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}-\int\mathrm{e}^{-2x}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x\right)$

$$=-\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\int\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})\right]=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{-2x}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2x}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{16}\int\mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

移项整理得 $\int\mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=-\frac{2}{17}\mathrm{e}^{-2x}\left(4\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)+C$

8. $\int x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=2\int x\mathrm{d}\left(\sin\frac{x}{2}\right)=2\left(x\sin\frac{x}{2}-\int\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x\right)=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$.

9. $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\arctan x\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}\left(x^3\arctan x-\int\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]+C$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$$

10. $\int x\tan^2x\mathrm{d}x=\int x(\sec^2x-1)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(\tan x)-\frac{x^2}{2}=x\tan x-\int\tan x\mathrm{d}x-\frac{x^2}{2}$

$$=x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C.$$

11. $\int x^2\cos x\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}(\sin x)=x^2\sin x-2\int x\sin x\mathrm{d}x$

$$=x^2\sin x+2\int x\mathrm{d}(\cos x)=x^2\sin x+2x\cos x-2\int\cos x\mathrm{d}x$$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C.$$

12. $\int t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int t\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2t})=-\frac{1}{2}\left(t\mathrm{e}^{-2t}-\int\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t\right)=-\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}+C$.

13. $\int\ln^2x\mathrm{d}x=x\ln^2x-2\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln^2x-2x\ln x+2\int\mathrm{d}x=x\ln^2x-2x\ln x+2x+C$.

14. $\int x\sin x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x\sin2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int x\mathrm{d}(\cos2x)=-\frac{1}{4}\left(x\cos2x-\int\cos2x\mathrm{d}x\right)$

$$=-\frac{1}{4}x\cos2x+\frac{1}{8}\sin2x+C.$$

15. $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int x^2\cdot\frac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}(\sin x)$

$$=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x^2\sin x-\int x\sin x\mathrm{d}x=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x^2\sin x+\int x\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\int\cos x\mathrm{d}x=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\sin x+C.$$

16. 方法一：

设 $x-1=t$，则 $x=t+1,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，于是

$$\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x=\int(t+1)\ln t\mathrm{d}t=\int t\ln t\mathrm{d}t+\int\ln t\mathrm{d}t=\int\ln t\mathrm{d}\left(\frac{t^2}{2}\right)+t\ln t-\int\mathrm{d}t$$

$$=\frac{t^2}{2}\ln t-\int\frac{t}{2}\mathrm{d}t+t\ln t-t=\frac{t^2}{2}\ln t-\frac{t^2}{4}+t\ln t-t+C_1$$

$$=\frac{(x-1)^2}{2}\ln(x-1)-\frac{(x-1)^2}{4}+(x-1)\ln(x-1)-(x-1)+C_1$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+C_2\text{（其中 }C_2=C_1+\frac{3}{4}\text{）}.$$

方法二：

$$\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln(x-1)\mathrm{d}(x^2-1)$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int(x+1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{4}(x+1)^2+C_1$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+C_2\quad\text{（其中 }C_2=C_1-\frac{1}{4}\text{）}.$$

17. 方法一：

$$\int(x^2-1)\sin 2x\mathrm{d}x=\int x^2\sin 2x\mathrm{d}x-\int\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}(\cos 2x)+\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\int x\cos 2x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}(\sin 2x)+\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{3}{4}\cos 2x+C.$$

方法二：

$$\int(x^2-1)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int(x^2-1)\mathrm{d}(\cos 2x)$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\int x\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}(\sin 2x)$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{3}{2}\right)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+C.$$

18. $\int\frac{\ln^3 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int\ln^3 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln^3 x}{x}+3\int\frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln^3 x}{x}-3\int\ln^2 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=-\frac{\ln^3 x}{x}-3\frac{\ln^2 x}{x}+6\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln^3 x}{x}-3\frac{\ln^2 x}{x}-6\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{\ln^3 x}{x}-3\frac{\ln^2 x}{x}-6\frac{\ln x}{x}+6\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6}{x}+C.$$

19. 设 $\sqrt[3]{x}=t$，则 $x=t^3,\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$，于是

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=3\int t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=3\int t^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)=3t^2\mathrm{e}^t-6\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

$$=3t^2\mathrm{e}^t-6\int t\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)=3t^2\mathrm{e}^t-6t\mathrm{e}^t+6\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

$$=3t^2\mathrm{e}^t-6t\mathrm{e}^t+6\mathrm{e}^t+C=3\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C.$$

20. $\int\cos\ln x\mathrm{d}x=x\cos\ln x+\int\sin\ln x\mathrm{d}x=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int\cos\ln x\mathrm{d}x$

移项整理得 $\int\cos\ln x\mathrm{d}x=\frac{x(\cos\ln x+\sin\ln x)}{2}+C.$

21. $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x=x(\arcsin x)^2-2\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\mathrm{d}x$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin x\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int\mathrm{d}x$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

22. $\int\mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x$

其中 $\int\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x=\int\cos 2x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\cos 2x+2\int\mathrm{e}^x\sin 2x\mathrm{d}x$

$$=\mathrm{e}^x\cos 2x+2\int\sin 2x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$$

$$=\mathrm{e}^x\cos 2x+2\mathrm{e}^x\sin 2x-4\int\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x$$

移项整理得 $\int\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}(\mathrm{e}^x\cos 2x+2\mathrm{e}^x\sin 2x)+C_1$

于是 $\int e^x\sin^2 x dx=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{5}e^x\sin 2x-\frac{1}{10}e^x\cos 2x+C_2$（其中 $C_2=-\frac{1}{2}C_1$）.

23. $\int x\ln^2 x dx=\frac{1}{2}\int\ln^2 x d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\int x\ln x dx=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}\int\ln x d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}\int x dx=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{x^2}{4}+C.$$

24. 设 $\sqrt{3x+9}=t$, 则 $x=\frac{t^2-9}{3}, dx=\frac{2}{3}t dt$，于是

$$\int e^{\sqrt{3x+9}}dx=\frac{2}{3}\int te^t dt=\frac{2}{3}\int t d(e^t)=\frac{2}{3}\left(te^t-\int e^t dt\right)=\frac{2}{3}e^t(t-1)+C=\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x+9}}(\sqrt{3x+9}-1)+C.$$

习题 4-4

求下列不定积分.

1. $\int\frac{x^3}{x+3}dx$；　**2.** $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$；　**3.** $\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}dx$；

4. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$；　**5.** $\int\frac{3}{x^3+1}dx$；　**6.** $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$；

7. $\int\frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$；　**8.** $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$；　**9.** $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$；

10. $\int\frac{1}{x^4-1}dx$；　**11.** $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$；　**12.** $\int\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}dx$；

13. $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx$；　**14.** $\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}$；　**15.** $\int\frac{dx}{3+\cos x}$；

16. $\int\frac{dx}{2+\sin x}$；　**17.** $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$；　**18.** $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$；

19. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$；　**20.** $\int\frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}+1}dx$；　**21.** $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$；

22. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$；　**23.** $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$；　**24.** $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

解　1. 由多项式除法得 $\frac{x^3}{x+3}=x^2-3x+9-\frac{27}{x+3}$，

于是 $\int\frac{x^3}{x+3}dx=\int\left(x^2-3x+9-\frac{27}{x+3}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$.

2. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx=\int\frac{d(x^2+3x-10)}{x^2+3x-10}=\ln|x^2+3x-10|+C$.

3. $\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-2)+2}{x^2-2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-2x+5)}{x^2-2x+5}+\int\frac{d\left(\frac{x-1}{2}\right)}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+\arctan\frac{x-1}{2}+C.$$

4. 设 $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$，则两端去分母后得

$1=A(x^2+1)+(Bx+C)x$，即 $1=(A+B)x^2+Cx+A$，

有 $\begin{cases}A+B=0\\C=0\\A=1\end{cases}$，　解得 $\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=0\end{cases}$，

于是 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$

5. 设 $\frac{3}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$，则两端去分母后得

$$3=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1),$$

即　$3=(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C$，

有 $\begin{cases}A+B=0\\B+C-A=0\\A+C=3\end{cases}$，　解得 $\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=2\end{cases}$，

于是 $\int\frac{3}{x^3+1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{d}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

6. 设 $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$，则两端去分母后得

$$x^2+1=A(x+1)^2+B(x^2-1)+C(x-1),$$

即　$x^2+1=(A+B)x^2+(2A+C)x+A-B-C$，

有 $\begin{cases}A+B=1\\2A+C=0\\A-B-C=1\end{cases}$，　解得 $\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=\frac{1}{2}\\C=-1\end{cases}$，

于是 $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \int \left[\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

7. 设 $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$，则两端去分母后得

$$x = A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2),$$

即 $x = (A+B+C)x^2+(5A+4B+3C)x+(6A+3B+2C)$，

有 $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=1 \\ 6A+3B+2C=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=2 \\ C=-\frac{3}{2} \end{cases}$，

于是 $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{\frac{3}{2}}{x+3}\right)dx$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C.$$

8. 由多项式除法得 $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} = x^2+x+1+\frac{x^2+x-8}{x^3-x}$，

其中设 $\frac{x^2+x-8}{x^3-x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$，则两端去分母后得

$$x^2+x-8 = A(x+1)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1),$$

即 $x^2+x-8 = (A+B+C)x^2+(C-B)x-A$，

有 $\begin{cases} A+B+C=1 \\ C-B=1 \\ A=8 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} A=8 \\ B=-4 \\ C=-3 \end{cases}$，

于是 $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx = \int \left(x^2+x+1+\frac{8}{x}-\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x-1}\right)dx$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+8\ln|x|-4\ln|x+1|-3\ln|x-1|+C.$$

9. 设 $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$，则两端去分母后得

$$1 = A(x+1)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x(x+1),$$

即 $1 = (A+B+C)x^3+(A+C+D)x^2+(A+B+D)x+A$，

有 $\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+C+D=0 \\ A+B+D=0 \\ A=1 \end{cases}$， 解得 $\begin{cases} A=1 \\ B=-\dfrac{1}{2} \\ C=-\dfrac{1}{2} \\ D=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$，

于是 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{1}{2}\arctan x$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

10. 设 $\dfrac{1}{x^4-1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$，则两端去分母后得

$$1=A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1),$$

即 $1=(A+B+C)x^3+(B+D-A)x^2+(A+B-C)x-A+B-D$，

有 $\begin{cases} A+B+C=0 \\ B+D-A=0 \\ A+B-C=0 \\ -A+B-D=1 \end{cases}$， 解得 $\begin{cases} A=-\dfrac{1}{4} \\ B=\dfrac{1}{4} \\ C=0 \\ D=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$，

于是 $\displaystyle\int\frac{1}{x^4-1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{-\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\arctan x+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

11. 设 $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$，则两端去分母后得

$$1=(Ax+B)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2+1),$$

即 $1=(A+C)x^3+(A+B+D)x^2+(A+B+C)x+B+D$，

有 $\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+D=0 \\ A+B+C=0 \\ B+D=1 \end{cases}$， 解得 $\begin{cases} A=-1 \\ B=0 \\ C=1 \\ D=1 \end{cases}$，

于是 $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\int\left(\frac{-x}{x^2+1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)dx$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^1+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

12. $\int\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{x^2+1+2x}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\arctan x-\frac{1}{x^2+1}+C$.

13. $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{-(x^2+x+1)+(x-1)}{(x^2+x+1)^2}dx$

$$=\int\left[\frac{-1}{x^2+x+1}+\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}\right]dx$$

$$=-\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2(x^2+x+1)}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

其中 $\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{16}{9}\int\frac{dx}{\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^2}$,

令 $\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $x=\frac{\sqrt{3}\tan t-1}{2}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t dt$,

于是 $\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{16}{9}\int\frac{dx}{\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^2}=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int\frac{dt}{\sec^2 t}=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int\cos^2 t dt$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{9}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{4\sqrt{3}}{9}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C_1$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+C_1$$

故 $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2(x^2+x+1)}$

$$-\frac{3}{2}\left[\frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+C_1\right]$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{x+1}{x^2+x+1}+C_2 \text{（其中 } C_2=-\frac{3}{2}C_1\text{）}.$$

14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x}=-\int \frac{\mathrm{d}(\cot x)}{3\csc^2 x+1}=-\int \frac{\mathrm{d}(\cot x)}{3\cot^2 x+4}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cot x\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cot x\right)^2+1}$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}\cot x}{2}+C.$$

15. 设 $u=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$, 则 $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$,

于是 $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}=\int \frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C$.

16. 设 $u=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$, 则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$

于是 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}=\int \frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+u+1}$

$$=\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

17. 设 $u=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$, 则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$,

于是 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}=\int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u}=\ln|1+u|+C=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$.

18. 设 $u=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$, 则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$,

于是 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}=\int \frac{1}{\frac{4u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}+5}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int \frac{\mathrm{d}u}{3u^2+2u+2}$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}\left(u+\frac{1}{3}\right)}{\left(u+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3u+1}{\sqrt{5}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$$

19. 设 $\sqrt[3]{x+1}=u$, 即 $x=u^3-1$, 则 $\mathrm{d}x=3u^2\mathrm{d}u$,

于是 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}=\int\frac{3u^2\mathrm{d}u}{1+u}=3\int\left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u=3\left(\frac{u^2}{2}-u+\ln|1+u|\right)+C$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+C\ .$$

20. 设 $\sqrt{x}=u$, 即 $x=u^2$, 则 $\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$,

于是 $$\int\frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x=\int\frac{u^3-1}{u+1}\cdot 2u\mathrm{d}u=\int\left(2u^3-2u^2+2u-4+\frac{4}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2}u^4-\frac{2}{3}u^3+u^2-4u+4\ln|u+1|+C$$
$$=\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}+4\ln(\sqrt{x}+1)+C\ .$$

21. 设 $\sqrt{x+1}=u$, 则 $x=u^2-1,\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$,

于是 $$\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x=\int\frac{u-1}{u+1}\cdot 2u\mathrm{d}u=2\int\left(u-2+\frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$
$$=u^2-4u+4\ln|u+1|+C_1$$
$$=x-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C_2$$ （其中 $C_2+1=C_1$ ）.

22. 设 $\sqrt[4]{x}=u$, 则 $x=u^4,\mathrm{d}x=4u^3\mathrm{d}u$,

于是 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int\frac{4u^3\mathrm{d}u}{u^2+u}=4\int\left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u=2u^2-4u+4\ln|u+1|+C$$
$$=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C\ .$$

23. 设 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=u$, 则 $x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2},\mathrm{d}x=\dfrac{-4u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u$,

于是 $$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int u\cdot\frac{1+u^2}{1-u^2}\cdot\frac{-4u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u=\int\frac{-4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\mathrm{d}u$$
$$=\int\left(\frac{2}{1+u^2}-\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$
$$=2\arctan u+\ln|1-u|-\ln|1+u|+C$$
$$=2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+C\ .$$

24. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$, 设 $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}=u$, 则 $x=\dfrac{u^3+1}{u^3-1},\mathrm{d}x=\dfrac{-6u^2}{(u^3-1)^2}\mathrm{d}u$,

于是 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\left(\dfrac{u^3+1}{u^3-1}\right)^2-1}\cdot u\cdot\frac{-6u^2}{(u^3-1)^2}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{3}{2}\int du=-\frac{3}{2}u+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

习题 4-5

利用积分表计算下列不定积分.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$；
2. $\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx$；
3. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$；
4. $\int\sqrt{2x^2+9}dx$；
5. $\int\sqrt{3x^2-2}dx$；
6. $\int e^{2x}\cos xdx$；
7. $\int x\arcsin\frac{x}{2}dx$；
8. $\int\frac{dx}{(x^2+9)^2}$；
9. $\int\frac{dx}{\sin^3x}$；
10. $\int e^{-2x}\sin 3xdx$；
11. $\int\sin 3x\sin 5xdx$；
12. $\int\ln^3 xdx$；
13. $\int\frac{1}{x^2(1-x)}dx$；
14. $\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$；
15. $\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$；
16. $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$；
17. $\int\frac{x}{(2+3x)^2}dx$；
18. $\int\cos^6 xdx$；
19. $\int x^2\sqrt{x^2-2}dx$；
20. $\int\frac{1}{2+5\cos x}dx$；
21. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{2x-1}}$；
22. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$；
23. $\int\frac{x+5}{x^2-2x-1}dx$；
24. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}}$；
25. $\int\frac{x^4}{25+4x^2}dx$.

解 下列各题中等号上面的数字为所用积分公式在《高等数学》（第七版）上册附录 IV 积分表中的编号.

1. $$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2-3^2}}\overset{45}{=}\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{(2x)^2-3^2}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+C.$$

2. $$\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx\overset{29}{=}\frac{2}{\sqrt{4\cdot5-2^2}}\arctan\frac{2x+2}{\sqrt{4\cdot5-2^2}}+C=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C.$$

3. $$\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}}\overset{31}{=}\ln[(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+1}]+C$$
$$=\ln[(x-2)+\sqrt{5-4x+x^2}]+C.$$

4. $$\int\sqrt{2x^2+9}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+3^2}d(\sqrt{2}x)$$
$$\overset{39}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\sqrt{2}x}{2}\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+3^2}+\frac{3^2}{2}\ln[\sqrt{2}x+\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+3^2}]\right\}+C$$
$$=\frac{x}{2}\sqrt{2x^2+9}+\frac{9\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9})+C.$$

5. $\displaystyle\int\sqrt{3x^2-2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}\,\mathrm{d}(\sqrt{3}x)$

$$\overset{53}{=}\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}-\frac{(\sqrt{2})^2}{2}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}\right|\right]+C$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{3x^2-2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|+C\,.$$

6. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x\overset{129}{=}\frac{1}{2^2+1^2}\mathrm{e}^{2x}(\sin x+2\cos x)+C=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(\sin x+2\cos x)+C\,.$

7. $\displaystyle\int x\arcsin\frac{x}{2}\mathrm{d}x\overset{114}{=}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{2^2-x^2}+C$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}+C\,.$$

8. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3^2)^2}\overset{20}{=}\frac{x}{2\cdot(2-1)\cdot 3^2\cdot(x^2+3^2)}+\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot(2-1)3^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+3^2}$

$$\overset{19}{=}\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+C$$

$$=\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3}+C\,.$$

9. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}\overset{97}{=}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}\overset{88}{=}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\,.$

10. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x\overset{128}{=}\frac{1}{(-2)^2+3^2}\mathrm{e}^{-2x}(-2\sin 3x-3\cos 3x)+C$

$$=-\frac{1}{13}\mathrm{e}^{-2x}(2\sin 3x+3\cos 3x)+C\,.$$

11. $\displaystyle\int\sin 3x\sin 5x\,\mathrm{d}x\overset{101}{=}-\frac{1}{2(3+5)}\sin(3+5)x+\frac{1}{2(3-5)}\sin(3-5)x+C$

$$=-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x+C\,.$$

12. $\displaystyle\int\ln^3 x\,\mathrm{d}x\overset{135}{=}x(\ln x)^3-3\int\ln^2 x\,\mathrm{d}x\overset{135}{=}x(\ln x)^3-3\left[x(\ln x)^2-2\int\ln x\,\mathrm{d}x\right]$

$$\overset{132}{=}x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+6(x\ln x-x)+C$$

$$=x\ln^3 x-3x\ln^2 x+6x\ln x-6x+C\,.$$

13. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2(1-x)}\mathrm{d}x\overset{6}{=}-\frac{1}{x}-\ln\left|\frac{1-x}{x}\right|+C\,.$

14. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x\overset{17}{=}2\sqrt{x-1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}\overset{15}{=}2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C$.

15. $\displaystyle\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\overset{20}{=}\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\overset{19}{=}\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+C$.

16. $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\overset{51}{=}\arccos\frac{1}{|x|}+C$.

17. $\displaystyle\int\frac{x}{(2+3x)^2}\mathrm{d}x\overset{7}{=}\frac{1}{9}\left(\ln|2+3x|+\frac{2}{2+3x}\right)+C$.

18. $$\begin{aligned}\int\cos^6 x\mathrm{d}x&\overset{96}{=}\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{6}\int\cos^4 x\mathrm{d}x\\&\overset{96}{=}\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}\cos^3 x\sin x+\frac{3}{4}\int\cos^2 x\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{24}\cos^3 x\sin x+\frac{5}{8}\int\cos^2 x\mathrm{d}x\\&\overset{96}{=}\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{24}\cos^3 x\sin x+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{2}\cos x\sin x+\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{24}\cos^3 x\sin x+\frac{5}{16}\cos x\sin x+\frac{5}{16}x+C .\end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^2-2}\mathrm{d}x&\overset{56}{=}\frac{x}{8}(2x^2-2)\sqrt{x^2-2}-\frac{4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C\\&=\frac{x}{4}(x^2-1)\sqrt{x^2-2}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C .\end{aligned}$$

20. $\displaystyle\int\frac{1}{2+5\cos x}\mathrm{d}x\overset{106}{=}\frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{3}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{7}{3}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{7}{3}}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{7}}\right|+C$.

21. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x-1}}\overset{16}{=}-\frac{\sqrt{2x-1}}{-x}-\frac{2}{-2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-1}}=\frac{\sqrt{2x-1}}{x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-1}}\overset{15}{=}\frac{\sqrt{2x-1}}{x}+2\arctan\sqrt{2x-1}+C$.

22. $$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x&=\int\sqrt{\frac{x-1}{-1-x}}\mathrm{d}x\overset{80}{=}(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{-1-x}}+(-1-1)\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{-1-1}}+C\\&=\sqrt{1-x^2}-2\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}}+C .\end{aligned}$$

23. $\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x+5\int\frac{1}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x$

$$\overset{30}{=}\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-1\right|-\frac{-2}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-1}+5\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-1\right|+6\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-1}$$

$$\overset{29}{=}\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-1\right|+6\frac{1}{\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}\cdot\ln\left|\frac{2x-2-\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2x-2+\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-1\right|+\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}\right|+C.$$

24. $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}\overset{78}{=}-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$

25. $\displaystyle\int\frac{x^4}{25+4x^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x^2}{4}-\frac{25}{16}+\frac{625}{16}\cdot\frac{1}{25+4x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{12}-\frac{25}{16}x+\frac{625}{32}\int\frac{1}{5^2+(2x)^2}\mathrm{d}(2x)$

$$\overset{19}{=}\frac{x^3}{12}-\frac{25}{16}x+\frac{625}{32}\cdot\frac{1}{5}\arctan\frac{2x}{5}+C=\frac{x^3}{12}-\frac{25}{16}x+\frac{125}{32}\arctan\frac{2x}{5}+C.$$

总习题四

1. 填空.

(1) $\int x^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=$________.

(2) $\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=$________.

解 (1) $\int x^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x^3\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x^3\mathrm{e}^x-3\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x^3\mathrm{e}^x-3\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$$=x^3\mathrm{e}^x-3\left(x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right)=x^3\mathrm{e}^x-3x^2\mathrm{e}^x+6\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$=x^3\mathrm{e}^x-3x^2\mathrm{e}^x+6x\mathrm{e}^x-6\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x^3\mathrm{e}^x-3x^2\mathrm{e}^x+6x\mathrm{e}^x-6\mathrm{e}^x+C.$$

(2) $\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-6)+8}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+8\int\frac{\mathrm{d}(x-3)}{(x-3)^2+2^2}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C.$$

2. 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

(1) 已知 $f'(x)=\dfrac{1}{x(1+2\ln x)}$，且 $f(1)=1$，则 $f(x)$ 等于( ).

A. $\ln(1+2\ln x)+1$ B. $\dfrac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+1$

C. $\dfrac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+\dfrac{1}{2}$ D. $2\ln(1+2\ln x)+1$

(2) 在下列等式中，正确的结果是( ).

A. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)$　　B. $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)$

C. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$　　D. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$

解　(1) 由 $f'(x) = \frac{1}{x(1+2\ln x)}$ 得

$$f(x) = \int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+2\ln x)}{1+2\ln x} = \frac{1}{2}\ln(1+2\ln x) + C\text{;}$$

又由 $f(1)=1$ 得，$C=1$．故答案为 B.

(2) 选项 A 和 B 等号左边是不定积分，故右边应带有任意常数 C；选项 D 等号左边是微分而右边不是，故正确答案为 C.

3. 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x$.

解　因为 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，即 $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$,

所以 $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x = \int x^3 \mathrm{d}f(x) = x^3 f(x) - 3\int f(x)x^2\mathrm{d}x$

$$= x^2\cos x - x\sin x - 3\int(x\cos x - \sin x)\mathrm{d}x = x^2\cos x - x\sin x - 3\int x\mathrm{d}(\sin x) - 3\cos x$$

$$= x^2\cos x - 4x\sin x - 6\cos x + C\text{ .}$$

4. 求下列不定积分（其中 a,b 为常数）.

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$；　　(2) $\int \frac{x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{x^2}{a^6 - x^6}\mathrm{d}x(a>0)$；　　(4) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \tan^4 x\mathrm{d}x$；　　(8) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\mathrm{d}x$；

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$；　　(10) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x(a>0)$；

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$；　　(12) $\int x\cos^2 x\mathrm{d}x$；

(13) $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$；　　(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$；

(15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$；　　(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{5/2}}$；

(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；　　(18) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$；

(19) $\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$；　　(20) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$；

(21) $\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$；

(22) $\int \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x$；

(23) $\int \dfrac{x^3}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}x$；

(24) $\int \dfrac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\mathrm{d}x$；

(25) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{16-x^4}$；

(26) $\int \dfrac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$

(27) $\int \dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$；

(28) $\int \mathrm{e}^{\sin x}\dfrac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$；

(29) $\int \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$；

(30) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$；

(31) $\int \dfrac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{4x}-\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x$；

(32) $\int \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\mathrm{d}x$；

(33) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$；

(34) $\int \dfrac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$；

(35) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x$；

(36) $\int \dfrac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(37) $\int \dfrac{\cot x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$；

(38) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x}$；

(39) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$；

(40) $\int \dfrac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}=\int \dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}-1}=\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{|\mathrm{e}^x-1|}{\mathrm{e}^x+1}+C.$

(2) $\int \dfrac{x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x=\int \dfrac{(x-1)+1}{(1-x)^3}\mathrm{d}x=-\int \dfrac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2}-\int \dfrac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^3}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2(x-1)^2}+C.$

(3) $\int \dfrac{x^2}{a^6-x^6}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6a^3}\int\left(\dfrac{1}{a^3+x^3}-\dfrac{1}{x^3-a^3}\right)\mathrm{d}(x^3)=\dfrac{1}{6a^3}\ln\left|\dfrac{a^3+x^3}{a^3-x^3}\right|+C.$

(4) $\int \dfrac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x=\int \dfrac{\mathrm{d}(x+\sin x)}{x+\sin x}=\ln|x+\sin x|+C.$

(5) $\int \dfrac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int \ln\ln x\mathrm{d}(\ln x)=\ln x\ln\ln x-\int \ln x\mathrm{d}(\ln\ln x)$

$$=\ln x\ln\ln x-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln x\ln\ln x-\ln x+C.$$

(6) $\int \dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int \dfrac{\mathrm{d}(\sin^2 x)}{1+(\sin^2 x)^2}=\dfrac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+C.$

(7) $\int \tan^4 x\mathrm{d}x=\int \tan^2 x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int \tan^2 x\mathrm{d}(\tan x)-\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$

$$=\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x+C.$$

(8) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int(\cos x-\cos 3x)\sin 3x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos x\sin 3x-\cos 3x\sin 3x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int(\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x)\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{24}\cos 6x+C.$$

(9) 设 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，

于是 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}=-\int\frac{t^5\mathrm{d}t}{1+4t^6}=-\frac{1}{24}\int\frac{\mathrm{d}(1+4t^6)}{1+4t^6}=-\frac{1}{24}\ln(1+4t^6)+C$$
$$=-\frac{1}{24}\ln\left(1+\frac{4}{x^6}\right)+C=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C.$$

(10) $$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=a\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

(11) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

当 $x>0$ 时，设 $x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sec t,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec t\tan t\mathrm{d}t$，

于是 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{\frac{1}{2}\sec t\tan t\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sec t\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C$$
$$=\ln[2x+1+2\sqrt{x(1+x)}]+C.$$

当 $x<-1$ 时，设 $x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sec t,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sec t\tan t\mathrm{d}t$，

于是 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{-\frac{1}{2}\sec t\tan t\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sec t\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=-\int\sec t\mathrm{d}t=-\ln|\sec t+\tan t|+C$$
$$=-\ln[-2x-1+2\sqrt{x(1+x)}]+C$$
$$=\ln[-2x-1-2\sqrt{x(1+x)}]+C$$

综上有 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\ln\left|2x+1+2\sqrt{x(1+x)}\right|+C.$$

(12) $$\int x\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\int x\mathrm{d}(\sin 2x)$$
$$=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\left(x\sin 2x-\int\sin 2x\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C.$$

(13) 当 $a=0$ 时，$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\int\cos bx\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C, & b=0,\\ \dfrac{\sin bx}{b}+C, & b\neq 0.\end{cases}$

当 $a\neq 0$ 时，$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\int\cos bx\mathrm{d}(e^{ax})=\dfrac{1}{a}\left(e^{ax}\cos bx+b\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x\right)$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}\int\sin bx\mathrm{d}(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\sin bx-b\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$$

移项整理得 $\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)+C$.

(14) 设 $\sqrt{1+e^x}=u$，则 $x=\ln(u^2-1),\mathrm{d}x=\dfrac{2u}{u^2-1}\mathrm{d}u$，

于是 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}}=\int\dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{2u}{u^2-1}\mathrm{d}u=2\int\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-1}=\int\left(\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$

$$=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.$$

(15) 当 $x>1$ 时，设 $x=\sec t\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=\sec t\tan t\mathrm{d}t$，

于是 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int\dfrac{\sec t\tan t\mathrm{d}t}{\sec^2 t\tan t}=\int\cos t\mathrm{d}t=\sin t+C=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$；

当 $x<-1$ 时，设 $x=-u$，则 $u>1$，$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$，

于是 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=-\int\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{u^2-1}}=-\dfrac{\sqrt{u^2-1}}{u}+C=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

综上有 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$.

(16) 设 $x=a\sin t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，

于是 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{5/2}}=\int\dfrac{a\cos t\mathrm{d}t}{a^5\cos^5 t}=\dfrac{1}{a^4}\int\sec^4 t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a^4}\int(\tan^2 t+1)\mathrm{d}(\tan t)$

$$=\frac{\tan^3 t}{3a^4}+\frac{\tan t}{a^4}+C=\frac{1}{3a^4}\left[\frac{x^3}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}+\frac{3x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]+C.$$

(17) 当 $x>0$ 时，设 $x=\tan t\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，

于是 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int\dfrac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{\tan^4 t\sec t}=\int\dfrac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\mathrm{d}t=\int\cot^3 t\csc t\mathrm{d}t$

$$=-\int(\csc^2 x-1)\mathrm{d}(\csc t)=-\frac{\csc^3 t}{3}+\csc t+C$$

$$=-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C;$$

当 $x<0$ 时，设 $x=\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<0\right)$，计算过程与结果均同上.

综上有 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}=-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

(18) 设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，

于是 $\displaystyle\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\int t^2\sin t\mathrm{d}t=-2\int t^2\mathrm{d}(\cos t)=-2t^2\cos t+4\int t\cos t\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}&=-2t^2\cos t+4\int t\mathrm{d}(\sin t)\\&=-2t^2\cos t+4t\sin t-4\int\sin t\mathrm{d}t\\&=-2t^2\cos t+4t\sin t+4\cos t+C\\&=-2x\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+4\cos\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

(19) $\displaystyle\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=x\ln(1+x^2)-2\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=x\ln(1+x^2)-2\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C.$$

(20) $\displaystyle\int\frac{\sin^2x}{\cos^3x}\mathrm{d}x=\int\tan^2x\sec x\mathrm{d}x=\int(\sec^3x-\sec x)\mathrm{d}x=\int\sec^3x\mathrm{d}x-\int\sec x\mathrm{d}x$

其中 $\displaystyle\int\sec^3\mathrm{d}x=\int\sec x\mathrm{d}(\tan x)=\sec x\tan x-\int\tan^2x\sec x\mathrm{d}x$

$$=\sec x\tan x-\int\sec^3x\mathrm{d}x+\int\sec x\mathrm{d}x$$

移项整理得 $\displaystyle\int\sec^3x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\sec x\tan x+\int\sec x\mathrm{d}x\right)$

于是 $\displaystyle\int\frac{\sin^2x}{\cos^3x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec x\tan x-\frac{1}{2}\int\sec x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec x\tan x-\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C$.

(21) 设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，

于是 $\displaystyle\int\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int\arctan t\mathrm{d}(t^2)=t^2\arctan t-\int\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}&=t^2\arctan t-\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=t^2\arctan t-t+\arctan t+C\\&=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

(22) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

当 $\cos\dfrac{x}{2}>0$ 时，$\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\csc\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right|+C$

$$\begin{aligned}&=\sqrt{2}\ln\left|\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|+C=\sqrt{2}\ln\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}+C\\&=\sqrt{2}\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)+C;\end{aligned}$$

当 $\cos\frac{x}{2}<0$ 时，$\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\csc\frac{x}{2}\mathrm{d}x=-\sqrt{2}\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right|+C$

$$=-\sqrt{2}\ln\left|\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|+C=-\sqrt{2}\ln\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}+C$$

$$=-\sqrt{2}\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|+\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)+C$$

$$=\sqrt{2}\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)+C$$

综上有 $\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)+C$.

(23) 设 $x^4=u$，则 $\int\frac{x^3}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}$，另设 $u=\tan t\left(0\leqslant t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}u=\sec^2 t\mathrm{d}t$，

于是 $\int\frac{x^3}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{\sec^4 t}=\frac{1}{4}\int\cos^2 t\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{8}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{t}{8}+\frac{\sin 2t}{16}+C=\frac{\arctan x^4}{8}+\frac{x^4}{8(1+x^8)}+C.$$

(24) 设 $x^4=u$，

于是 $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{u^2}{u^2+3u+2}\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\int\left(1+\frac{1}{u+1}-\frac{4}{u+2}\right)\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{4}(u+\ln|u+1|-4\ln|u+2|)+C=\frac{x^4}{4}+\ln\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x^4+2}+C.$$

(25) $\int\frac{\mathrm{d}x}{16-x^4}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+x)(2-x)(4+x^2)}=\frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}+\frac{4}{4+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{32}\left(\ln|2+x|-\ln|2-x|+2\arctan\frac{x}{2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{32}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+\frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2}+C.$$

(26) 方法一:

设 $u=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$，

于是 $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=4\int\frac{u}{(1+u)^2(1+u^2)}\mathrm{d}u$

$$=2\int\left[\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{(1+u)^2}\right]\mathrm{d}u=2\arctan u+\frac{2}{1+u}+C$$

$$=x+\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

方法二:

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\tan^2 x\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^2 x}-\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\sec x-\tan x+x+C.$$

(27) $\displaystyle\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int x\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x=x\tan\frac{x}{2}+C.$$

(28) $\displaystyle\int\mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x-\int\mathrm{e}^{\sin x}\tan x\sec x\mathrm{d}x$

$$=\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\sin x})-\int\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}(\sec x)$$

$$=x\mathrm{e}^{\sin x}-\int\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x-\sec x\mathrm{e}^{\sin x}+\int\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=x\mathrm{e}^{\sin x}-\sec x\mathrm{e}^{\sin x}+C.$$

(29) 设 $x=t^6$，则 $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，

于是 $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x=\int\frac{t^2}{t^6(t^3+t^2)}\cdot 6t^5\mathrm{d}t=6\int\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$

$$=6\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=6\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C.$$

(30) 设 $\mathrm{e}^x=u$，则 $x=\ln u$，$\mathrm{d}x=\dfrac{1}{u}\mathrm{d}u$，

于是 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}=\int\frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)^2}=\int\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}-\frac{1}{(1+u)^2}\right]\mathrm{d}u$

$$=\ln|u|-\ln|1+u|+\frac{1}{1+u}+C=x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}+C.$$

(31) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{4x}-\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}-1+\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2+1}=\arctan(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})+C.$

(32) $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right)=-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x.$

下面求 $\displaystyle\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$

方法一:

$$\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{-x})}{1+\mathrm{e}^{-x}}=-\ln(1+\mathrm{e}^{-x})+C=x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$$

方法二:

设 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t$，$\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$，

于是 $\int \frac{1}{e^x+1}dx = \int \frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}dt = \int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C$

$$= \ln e^x - \ln(e^x+1) + C = x - \ln(e^x+1) + C$$

故 $\int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx = \frac{xe^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1) + C$.

(33) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot\frac{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}dx$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d(\sqrt{1+x^2})$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$
$$+2\int\sqrt{1+x^2}d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2\int dx$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$$

(34) 设 $x = \frac{1}{t}$，则 $dx = -\frac{1}{t^2}dt$，

于是 $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{-t^3\ln t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int\frac{t\ln t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt = -\int \ln t d\left[(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$

$$= -\frac{\ln t}{\sqrt{1+t^2}} + \int\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

(35) 设 $x = \sin t\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$，则 $dx = \cos t dt$，

于是 $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx = \int t\cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int t(1+\cos 2t)dt$

$$= \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}\int t d(\sin 2t) = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}(t\sin 2t - \int \sin 2t dt)$$

$$= \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}t\sin 2t + \frac{1}{8}\cos 2t + C_1$$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{4} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{4}x^2 + C_2 \text{（其中 } C_2 = C_1 + \frac{1}{8}\text{）}.$$

(36) 设 $x = \cos t(0 < t < \pi)$，则 $dx = -\sin t dt$，

方法一:

$$\int\frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{t\cos^3 t}{\sin t}\cdot(-\sin t)dt = -\int t\cos^3 t dt = -\int t\left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t\right)dt$$

$$= -\frac{3}{4}\int t d(\sin t) - \frac{1}{12}\int t d(\sin 3t)$$

$$=-\frac{3}{4}\left(t\sin t-\int\sin t\mathrm{d}t\right)-\frac{1}{12}\left(t\sin 3t-\int\sin 3t\mathrm{d}t\right)$$

$$=-\frac{3}{4}t\sin t-\frac{3}{4}\cos t-\frac{1}{12}t\sin 3t-\frac{1}{36}\cos 3t+C$$

$$=-\frac{3}{4}t\sin t-\frac{3}{4}\cos t-\frac{1}{12}t(3\sin t-4\sin^3 t)$$

$$-\frac{1}{36}(4\cos^3 t-3\cos t)+C$$

$$=-t\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)-\frac{2}{3}\cos t-\frac{1}{9}\cos^3 t+C$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(2+x^2)\arccos x-\frac{1}{9}x(6+x^2)+C.$$

方法二:

$$\int\frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{t\cos^3 t}{\sin t}\cdot(-\sin t)\mathrm{d}t=-\int t\cos^3 t\mathrm{d}t=-\int t\mathrm{d}\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)$$

$$=-t\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)+\int\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\mathrm{d}t$$

$$=-t\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)-\frac{1}{3}\int(2+\cos^2 t)\mathrm{d}(\cos t)$$

$$=-t\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)-\frac{2}{3}\cos t-\frac{1}{9}\cos^3 t+C$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(2+x^2)\arccos x-\frac{1}{9}x(6+x^2)+C.$$

(37) $\displaystyle\int\frac{\cot x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{\sin x(1+\sin x)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}(\sin x)=\ln\frac{|\sin x|}{1+\sin x}+C.$

(38) 方法一:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x}=\int\frac{\sec^4 x}{\tan^3 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}\mathrm{d}(\tan x)=\int\left(\frac{1}{\tan^3 x}+\frac{1}{\tan x}\right)\mathrm{d}(\tan x)$$

$$=-\frac{1}{2\tan^2 x}+\ln|\tan x|+C$$

方法二:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x}=\int\left(\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=-\int\cot x\sec^2 x\mathrm{d}(\cot x)$$

设 $\cot x=u$,

于是 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x}=-\int u\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=-\int\left(u+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=-\frac{u^2}{2}-\ln|u|+C$

$$=-\frac{\cot^2 x}{2}-\ln|\cot x|+C.$$

(39) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{(2+\cos x)(\cos^2 x-1)}$

$$=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{2+\cos x}-\frac{\frac{1}{2}}{\cos x+1}+\frac{\frac{1}{6}}{\cos x-1}\right)\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=\frac{1}{3}\ln(2+\cos x)-\frac{1}{2}\ln(\cos x+1)+\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)+C .$$

(40) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\sin x+\cos x-\frac{1}{\sin x+\cos x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(-\cos x+\sin x)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x .$$

下面求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

方法一:

$$\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

于是 $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(-\cos x+\sin x)-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C .$

方法二:

设 $u=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$,

于是 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}u}{2u+1-u^2}=-2\int\frac{\mathrm{d}u}{(u-1)^2-(\sqrt{2})^2}$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u-1-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u-1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{u-1+\sqrt{2}}{u-1-\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C$$

故 $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C .$

第 5 章

定积分

一、基本内容

1. 定积分的概念、性质、几何意义
   (1) 定积分的定义;
   (2) 定积分的性质.
2. 积分上限函数及其性质, 微积分基本定理
3. 定积分的换元法与分部积分法
4. 两类反常积分
   (1) 无穷限的反常积分;
   (2) 无界函数的反常积分.

二、基本要求

1. 理解定积分的定义, 掌握定积分的性质及基本定理.
2. 掌握定积分的换元积分法与分部积分法.
3. 理解积分上限的函数, 会求它的导数, 掌握牛顿-莱布尼茨公式.
4. 了解反常积分的概念, 会计算反常积分.

三、习题解答

习题 5-1

***1**. 利用定积分定义计算由抛物线 $y=x^2+1$, 两直线 $x=a$、$x=b$ $(b>a)$ 及 x 轴所围成图形的面积.

解 由于函数 $y=x^2+1$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以可积. 不妨将 $[a,b]$ 进行 n 等分, 取每个小区间 $\left[a,a+\dfrac{i(b-a)}{n}\right]$ 的右端点为 ξ_i, 即 $\xi_i=a+\dfrac{i(b-a)}{n},i=1,2,\cdots,n$, 区间长度为 $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$, $i=1,2,\cdots,n$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)^2+1\right]\frac{b-a}{n}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[a^2+\frac{2ai(b-a)}{n}+\left(\frac{i(b-a)}{n}\right)^2+1\right]\frac{b-a}{n}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(a^2+1)\frac{b-a}{n}+\frac{2a(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i+\frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\\ &= (a^2+1)(b-a)+\frac{2a(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(b-a)^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= (a^2+1)(b-a)+a(b-a)^2\frac{n+1}{n}+\frac{(b-a)^3}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\end{aligned}$$

当$n\to\infty$时，上式的极限是$(a^2+1)(b-a)+a(b-a)^2+\dfrac{(b-a)^3}{3}=\dfrac{b^3-a^3}{3}+b-a$，即为所求的面积.

***2**. 利用定积分定义计算下列积分：(1) $\int_a^b x\mathrm{d}x(a<b)$；(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 由于被积函数均在积分区间内连续，故可积. 故将区间进行n等分，并取ξ_i为区间右端点，从而有

(1) $\displaystyle\int_a^b x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right]\frac{(b-a)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right]=a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}$.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^{n+1}-1}{n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}}-1}{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\frac{\mathrm{e}-1}{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}}=\frac{\mathrm{e}-1}{1}=\mathrm{e}-1$.

注：(2)的倒数第二个等式的分母用到了洛必达法则.

3. 利用定积分的几何意义，证明下列等式.

(1) $\int_0^1 2x\mathrm{d}x=1$；(2) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$；(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$；(4) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi/2}\cos x\mathrm{d}x$.

证明 (1) 根据定积分的几何意义，定积分$\int_0^1 2x\mathrm{d}x$表示直线$y=2x$、$x=1$及x轴围成的图形的面积，该图形是底边长为1、高为2的直角三角形，因此面积为1，故$\int_0^1 2x\mathrm{d}x=1$.

(2) 根据定积分的几何意义，定积分$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$表示由曲线$y=\sqrt{1-x^2}$、$y$轴及$x$轴围成的图形的面积，该图形是圆心为坐标原点、半径为1的圆在第一象限的部分，因此面积为$\pi/4$，故$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\pi/4$.

(3) 由于函数$y=\sin x$在区间$[0,\pi]$上非负，在区间$[-\pi,0]$上非正，根据定积分的几何意义，定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$表示曲线$y=\sin x(x\in[0,\pi])$与$x$轴围成的图形$D_1$的面积减去曲线$y=\sin x(x\in[-\pi,0])$与$x$轴围成的图形$D_2$的面积，显然图形$D_1$与$D_2$的面积相等，故$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$.

(4) 由于函数 $y=\cos x$ 在区间 $\left[-\pi/2,\pi/2\right]$ 上非负，根据定积分的几何意义，定积分 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\mathrm{d}x$ 表示曲线 $y=\cos x\left(x\in\left[-\pi/2,0\right]\right)$ 与 x 轴和 y 轴围成的图形 D_1 的面积加上曲线 $y=\cos x\left(x\in\left[0,\pi/2\right]\right)$ 与 x 轴和 y 轴围成的图形 D_2 的面积，显然图形 D_1 与 D_2 的面积相等，故 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x$.

4. 利用定积分的几何意义，求下列积分.

(1) $\int_0^t x\mathrm{d}x(t>0)$； (2) $\int_{-2}^4\left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x$； (3) $\int_{-1}^2|x|\mathrm{d}x$； (4) $\int_{-3}^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) 根据定积分的几何意义，定积分 $\int_0^t x\,\mathrm{d}x$ 表示由直线 $y=x$ 、 $x=t$ 及 x 轴围成的图形的面积，该图形是底边长为 t 、高为 t 的直角三角形，因此面积为 $\frac{t^2}{2}$，故 $\int_0^t x\,\mathrm{d}x=\frac{t^2}{2}$.

(2) 根据定积分的几何意义，定积分 $\int_{-2}^4\left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x$ 表示由直线 $y=\frac{x}{2}+3$ 、 $x=-2$ 、 $x=4$ 及 x 轴围成的梯形的面积，该梯形的两底边长分别为 $\frac{-2}{2}+3=2$ 、 $\frac{4}{2}+3=5$，高为 $4-(-2)=6$，因此面积为 $\frac{1}{2}(2+5)6=21$，故 $\int_{-2}^4\left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x=21$.

(3) 根据定积分的几何意义，定积分 $\int_{-1}^2|x|\mathrm{d}x$ 表示由 $y=|x|$ 、 $x=-1$ 、 $x=2$ 及 x 轴围成的图形的面积，该图形为两个腰分别为 1 和 2 的等腰直角三角形，因此面积为 $\frac{5}{2}$，故 $\int_{-1}^2|x|\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

(4) 根据定积分的几何意义，定积分 $\int_{-3}^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$ 表示上半圆周 $y=\sqrt{9-x^2}$ 与 x 轴围成的半圆的面积，故 $\int_{-3}^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi\times3^2=\frac{9}{2}\pi$.

5. 设 $a<b$. 问 a 、 b 取什么值时，积分 $\int_a^b(x-x^2)\mathrm{d}x$ 取得最大值?

解 根据定积分的几何意义，定积分 $\int_a^b(x-x^2)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=x-x^2$，直线 $x=a$ 、 $x=b$ 及 x 轴围成的图形在 x 轴上方的面积减去在 x 轴下方的面积. 因此，如果下方面积为 0，上方面积最大时，$\int_a^b(x-x^2)\mathrm{d}x$ 最大. 又因为函数 $y=x-x^2$ 在区间 $[0,1]$ 上非负，其余非正，故当 $a=0$ 、 $b=1$ 时 $\int_a^b(x-x^2)\mathrm{d}x$ 取得最大值.

6. 已知 $\ln 2=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$，试用抛物线法公式(1-6)，求出 $\ln 2$ 的近似值（取 $n=10$，计算时取 4 位小数）.

解 计算 y_i 并列表：

i	x_i	y_i
0	0.0000	1.0000
1	0.1000	0.9091
2	0.2000	0.8333
3	0.3000	0.7692
4	0.4000	0.7143
5	0.5000	0.6667
6	0.6000	0.6250
7	0.7000	0.5882
8	0.8000	0.5556
9	0.9000	0.5263
10	1.0000	0.5000

按抛物线法公式(1-6)，求得

$$s=\frac{1}{3\times 10}\left[(y_0+y_{10})+2(y_2+y_4+y_6+y_8)+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)\right]\approx 0.6931.$$

7. 设 $\int_{-1}^{1}3f(x)\mathrm{d}x=18$，$\int_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x=4$，$\int_{-1}^{3}g(x)\mathrm{d}x=3$．求：

(1) $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$；　(3) $\int_{3}^{-1}g(x)\mathrm{d}x$；　(4) $\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x$．

解　(1) $\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}3f(x)\,\mathrm{d}x=6$．

(2) $\int_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=4-6=-2.$

(3) $\int_{3}^{-1}g(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{3}g(x)\,\mathrm{d}x=-3.$

(4) $\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int_{-1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{3}{5}\int_{-1}^{3}g(x)\,\mathrm{d}x=5.$

8. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力．已知闸门上水的压强 p 与水深 h 存在函数关系，且有 $p=9.8h$ ($\mathrm{kN/m^2}$)．若闸门高 $H=3\mathrm{m}$，宽 $L=2\mathrm{m}$，求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力 P．

解　首先建立坐标系，以水深为横轴．将水深 h 在区间 $[0,3]$ 上进行 n 等分，取 ξ_i 为区间的右端点，记 $\Delta h_i, i=1,2,\cdots,n$ 表示每个小区间的长度，则闸门所受的水压力的近似值是 $\sum_{i=1}^{n}p(\xi_i)2\Delta h_i$．根据定积分的定义可知闸门所受的水压力是

$$P=\int_0^3 p(h)2\mathrm{d}h=19.6\int_0^3 h\mathrm{d}h.$$

由于被积函数连续，从而可积，故

$$P=19.6\int_0^3 h\mathrm{d}h=19.6\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3i}{n}\frac{3}{n}=19.6\times 9\times\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=88.2(\mathrm{kN}).$$

9. 证明定积分的性质：

(1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（$k$ 是常数）；　(2) $\int_a^b 1\cdot\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x=b-a$．

证明 根据定积分的定义，在区间$[a,b]$中任意插入$n-1$个点$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，则

(1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i=k\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

(2) $\int_a^b 1\cdot\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n \Delta x_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}(b-a)=b-a$.

10. 估计下列各积分的值:

(1) $\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x$； (2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$； (3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$； (4) $\int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$.

解 (1) 在区间$[1,4]$上，$2\leqslant x^2+1\leqslant 17$，因此有

$$6=\int_1^4 2\mathrm{d}x\leqslant\int_1^4 (x^2+1)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_1^4 17\mathrm{d}x=51.$$

(2) 在区间$\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$上，$1\leqslant 1+\sin^2 x=\frac{3-\cos 2x}{2}\leqslant 2$，因此有

$$\pi=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 1\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 2\mathrm{d}x=2\pi.$$

(3) 在区间$\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right]$上，$f(x)=x\arctan x$的导函数$f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}>0$，故$f(x)$在此区间上单调上升，即$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\leqslant x\arctan x\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}$，$x\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right]$，因此有

$$\frac{\pi}{9}=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}.$$

(4) 令$f(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}$，$x\in[0,2]$，则$f'(x)=(2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x}$，从而可得点$x=\frac{1}{2}$为函数$f(x)$的驻点，所以$f(x)$在$[0,2]$的最大值与最小值只能在$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(2)$中取到，即最大值$f(2)=\mathrm{e}^2$，最小值$f\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$. 因此有

$$-2\mathrm{e}^2=\int_2^0 f(2)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\leqslant\int_2^0 f\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}.$$

11. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

证明 记$a=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则由定积分的性质得$\int_0^1[f(x)-a]^2\,\mathrm{d}x\geqslant 0$. 故

$$\int_0^1\left[f^2(x)-2af(x)+a^2\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+a^2=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-a^2\geqslant 0,$$

因此$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

12. 设$f(x)$及$g(x)$在$[a,b]$上连续，证明:

(1) 若在$[a,b]$上，$f(x)\geqslant 0$，且$f(x)\neq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$;

(2) 若在$[a,b]$上，$f(x)\geqslant 0$，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，则在$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$;

(3) 若在$[a,b]$上，$f(x)\leqslant g(x)$，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，则在$[a,b]$上$f(x)\equiv g(x)$.

证明 (1)由条件必定存在$\xi\in[a,b]$使得$f(\xi)>0$. 根据连续性，则存在$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，且$\xi\in[\alpha,\beta]$，$f(x)\geqslant\dfrac{f(\xi)}{2}\left(x\in[\alpha,\beta]\right)$. 根据定积分的性质得

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_\alpha^\beta \dfrac{f(\xi)}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{f(\xi)}{2}(\beta-\alpha)>0$，故得到结论$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

(2) 反证法. 如果$f(x)\neq 0$. 则由结论(1)可知$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$，此与假设条件矛盾，因此结论成立.

(3) 令$F(x)=g(x)-f(x)$，则有$F(x)\geqslant 0$且$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，所以由结论(2)得$F(x)\equiv 0$，即$f(x)\equiv g(x)$.

13. 根据定积分的性质及题 12 的结论，说明下列各对积分哪一个的值较大.

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$还是$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$? (2) $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$还是$\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$? (3) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$还是$\int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$?

(4) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$还是$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$? (5) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$还是$\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$?

解 (1) 在区间$[0,1]$上，$x^2\geqslant x^3$，故$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$比$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$大.

(2) 在区间$[1,2]$上，$x^2\leqslant x^3$，故$\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$比$\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$大.

(3) 在区间$[1,2]$上，$0\leqslant\ln x\leqslant 1$，故$\ln x\geqslant(\ln x)^2$，所以$\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$比$\int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$大.

(4) 因为$(x-\ln(1+x))'=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}>0(x\geqslant 0)$，所以$x-\ln(1+x)$当$x\geqslant 0$时单调上升，故在区间$[0,1]$上，$x\geqslant\ln(1+x)$，因此$\int_0^1 x\mathrm{d}x$比$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$大.

(5) 在区间$[0,1]$上$x\geqslant\ln(1+x)$，故$\mathrm{e}^x\geqslant(1+x)$，所以$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$比$\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$大.

习题 5-2

1. 试求函数$y=\int_0^x \sin t\mathrm{d}t$当$x=0$及$x=\dfrac{\pi}{4}$时的导数.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin x$，故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求由参数表达式 $x=\int_0^t \sin u\,\mathrm{d}u$，$y=\int_0^t \cos u\,\mathrm{d}u$ 所确定的函数对 x 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 根据复合函数的求导法则，有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\cos t}{\sin t}=\cot t$.

3. 求由 $\int_0^y \mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t=0$ 所决定的隐函数对 x 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 方程两端对 x 求导得 $\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos x=0$，故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\cos x}{\mathrm{e}^y}$.

4. 当 x 为何值时，函数 $I(x)=\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 有极值？

解 因为函数 $t\mathrm{e}^{-t^2}$ 连续，得 $I(x)$ 可导，且 $I'(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}=0$ 只有唯一的一个解 $x=0$．当 $x>0$ 时 $I'(x)>0$，当 $x<0$ 时 $I'(x)<0$，故 $x=0$ 是 $I(x)$ 的唯一的极小值点.

5. 计算下列各导数.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$；　(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$；　(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=2x\sqrt{1+x^4}$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^3}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$.

(3)
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t\\&=-\sin x\cos(\pi\cos^2 x)-\cos x\cos(\pi\sin^2 x)\\&=-\sin x\cos(\pi-\pi\sin^2 x)-\cos x\cos(\pi\sin^2 x)\\&=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x).\end{aligned}$$

6. 证明 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是单调增加函数，并求 $(f^{-1})'(0)$.

证明 因为被积函数 $\sqrt{1+x^3}$ 连续，所以变上限积分函数 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是可导的.

由于当 $x>-1$ 时，$f'(x)=\left(\int_1^x\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t\right)'=\sqrt{1+x^3}>0$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是单调增加函数. 另外注意到 $f(1)=0$，所以 $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7. 设 $f(x)$ 具有三阶连续导数，$y=f(x)$ 的图形如图 5-8 所示. 问下列积分中哪个积分值为负？

A. $\int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x$　　B. $\int_{-1}^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$　　C. $\int_{-1}^3 f''(x)\,\mathrm{d}x$　　D. $\int_{-1}^3 f'''(x)\,\mathrm{d}x$

解 根据函数图像知，$y=f(x)$ 在区间 $(-1,3)$ 上 $f(x)>0$，且 $f(-1)=f(3)=0$，$f'(-1)>0$，$f''(-1)<0, f'(3)<0, f''(3)>0$. 因此

$\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x>0$，$\int_{-1}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x=f(3)-f(-1)=0$，

$\int_{-1}^{3} f''(x)\,\mathrm{d}x=f'(3)-f'(-1)<0$，$\int_{-1}^{3} f'''(x)\,\mathrm{d}x=f''(3)-f''(-1)>0$. 故选 C.

8. 计算下列各定积分.

(1) $\int_0^a(3x^2-x+1)\,\mathrm{d}x$；(2) $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$；(3) $\int_4^9\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$；(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$；

(5) $\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；(6) $\int_0^{\sqrt{3}a}\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$；(7) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$；(8) $\int_{-1}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$；

(9) $\int_{-\mathrm{e}-1}^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$；(10) $\int_0^{\pi/4}\tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta$；(11) $\int_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x$；

(12) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 1;\\ \frac{1}{2}x^2, & x>1.\end{cases}$

解 (1) $\int_0^a(3x^2-x+1)\,\mathrm{d}x=\left[x^3-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^a=a^3-\frac{a^2}{2}+a.$

(2) $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3x^3}\right]_1^2=\frac{21}{8}.$

(3) $\int_4^9\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int_4^9\left(x^{\frac{1}{2}}+x\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_4^9=\frac{271}{6}.$

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\left[\arctan x\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}.$

(5) $\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\arcsin x\right]_{-1/2}^{1/2}=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}.$

(6) $\int_0^{\sqrt{3}a}\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{\sqrt{3}a}=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3}-0\right)=\frac{\pi}{3a}.$

(7) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}=\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}.$

(8) $\int_{-1}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\left(3x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\left[x^3+\arctan x\right]_{-1}^0=\frac{\pi}{4}+1.$

(9) $\int_{-\mathrm{e}-1}^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\left[\ln|1+x|\right]_{-\mathrm{e}-1}^{-2}=-1.$

(10) $\int_0^{\pi/4}\tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/4}(\sec^2\theta-1)\mathrm{d}\theta=\left[\tan\theta-\theta\right]_0^{\pi/4}=1-\frac{\pi}{4}.$

(11) $\int_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}+\left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}=4.$

(12) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[(x+1)^2\right]_0^1+\frac{1}{6}\left[x^3\right]_1^2=\frac{8}{3}.$

9. 设 $k\in\mathrm{N}^+$，试证下列各题.

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x=0$； (2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x=0$； (3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x=\pi$； (4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x=\pi$.

证明 (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x=\frac{1}{k}\left[\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x=-\frac{1}{k}\left[\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{k}(-1+1)=0.$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 2kx+1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2kx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\pi.$

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2kx}{2}\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2kx\mathrm{d}x=\pi.$

10. 设 k、$l\in\mathrm{N}^+$，且 $k\neq l$．证明:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\mathrm{d}x=0$； (2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\mathrm{d}x=0$； (3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\mathrm{d}x=0$.

证明 (1)
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin(k+l)x-\sin(k-l)x\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k+l)x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k-l)x\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+l)x+\cos(k-l)x\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+l)x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-l)x\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+l)x-\cos(k-l)x\right]\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+l)x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-l)x\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

11. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x^2=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}(1+2x^2)}=2.$

12. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1),\\ x, & x\in[1,2].\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,2]$ 上的表达式，并讨论 $\Phi(x)$ 在 $(0,2)$ 内的连续性.

解 当 $x\in[0,1)$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left[t^3\right]_0^x=\frac{x^3}{3}$.

当 $x\in[1,2]$ 时，$\Phi(x)=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t+\int_1^x t\mathrm{d}t=\frac{1}{3}+\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}$.

故
$$\Phi(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & x\in[0,1),\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}, & x\in[1,2].\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to1^-}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3}{3}=\frac{1}{3}$，$\lim\limits_{x\to1^+}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$，所以 $\Phi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，在 $(0,2)$ 内其他点显然连续，故 $\Phi(x)$ 在 $(0,2)$ 内连续.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & x<0\text{或 } x>\pi.\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

解 当 $x<0$ 时 $\Phi(x)=\int_0^x 0\mathrm{d}t=0$.

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x\frac{1}{2}\sin t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left[\cos t\right]_0^x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x$.

当 $x>\pi$ 时 $\Phi(x)=\int_0^\pi\frac{1}{2}\sin t\mathrm{d}t+\int_\pi^x 0\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left[\cos t\right]_0^\pi=1$. 故
$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

14. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\leqslant 0$，
$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$
证明在 (a,b) 内有 $F'(x)\leqslant 0$.

证明 由于
$$F'(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\frac{f(x)}{x-a}=\frac{1}{(x-a)^2}\left[(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right].$$
令 $G(x)=(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 又因为 $G'(x)=(x-a)f'(x)\leqslant 0(x>a)$，所以 $G(x)\leqslant G(a)=0(x\geqslant a)$，故 $F'(x)\leqslant 0$.

15. 设 $F(x)=\int_a^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $F'(0)$.

解 $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

16. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$. 证明函数

$$y=\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t$$

满足方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=f(x)$，并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^x f(x)-\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-y$，故有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=1.$$

习题 5-3

1. 计算下列定积分:

(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$； (2) $\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}$； (3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi$；

(4) $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$； (5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,\mathrm{d}u$； (6) $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$；

(7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}\,\mathrm{d}y$； (8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$； (9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x(a>0)$；

(10) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$； (11) $\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$； (12) $\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$；

(13) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}$； (14) $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}(a>0)$； (15) $\int_0^1 t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$；

(16) $\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$； (17) $\int_{-2}^{0}\frac{(x+2)\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$； (18) $\int_0^2\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^2}$；

(19) $\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x\mathrm{d}x$； (20) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$； (21) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(22) $\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$； (23) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\mathrm{d}x$； (24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$；

(25) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$； (26) $\int_0^{2\pi}|\sin(x+1)|\,\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}=0.$

(2) $\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}=\frac{1}{5}\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}(11+5x)}{(11+5x)^3}=\frac{-1}{10}\left[(11+5x)^{-2}\right]_{-2}^{1}=\frac{51}{512}.$

(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\mathrm{d}\cos\varphi=-\frac{1}{4}\left[\cos^4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}.$

(4) $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\pi-\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\pi+\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\cos\theta$

$$=\pi+\left[\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}=\pi-\frac{4}{3}.$$

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2u\mathrm{d}u=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2u+1}{2}\mathrm{d}u=\left[\frac{\sin 2u}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$

(6) 令 $x=\sqrt{2}\sin t$，则 $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos 2t+1)\mathrm{d}t=\left[\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$

(7) 令 $y=2\sin t$，则

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}4\sqrt{2}\cos^2t\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2t+1)\mathrm{d}t=\sqrt{2}\left(\left[\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\pi\right)=\sqrt{2}(2+\pi).$$

(8) 令 $x=\sin t$，则 $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2t}{\sin^2t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2t-1)\mathrm{d}t=\left[-\cot t-t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{4}.$

(9) 令 $x=a\sin t$，则 $\int_0^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\mathrm{d}t=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}2t$，

再令 $u=2t$，则 $\int_0^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^4}{8}\int_0^{\pi}\sin^2u\mathrm{d}u=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2u\mathrm{d}u=\frac{a^4}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi a^4}{16}.$

(10) 令 $x=\frac{1}{u}$，则 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{u^2}{\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\left[\sqrt{1+u^2}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}$

$$=\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{3}}{3}.$$

(11) 令 $u=\sqrt{5-4x}$，则 $x=\frac{5-u^2}{4}$，故 $\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}=\int_3^{1}\frac{5-u^2}{4u}\left(-\frac{1}{2}u\right)\mathrm{d}u=\int_1^{3}\frac{5-u^2}{8}\mathrm{d}u$

$$=\left[\frac{5}{4}-\frac{u^3}{24}\right]_1^{3}=\frac{1}{6}.$$

(12) 令 $u=\sqrt{x}$，则 $\int_1^{4}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=\int_1^{2}\frac{2u\mathrm{d}u}{1+u}=\int_1^{2}\left(2-\frac{2}{1+u}\right)\mathrm{d}u=2-2\left[\ln\left(1+u\right)\right]_1^{2}=2+2\ln\frac{2}{3}.$

(13) 令 $u=\sqrt{1-x}$，则 $x=1-u^2$，故 $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}=-2\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{u\mathrm{d}x}{u-1}=1+2\left[\ln(1-u)\right]_0^{\frac{1}{2}}=1-2\ln 2.$

(14) $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\mathrm{d}(3a^2-x^2)}{\sqrt{3a^2-x^2}}=-\left[\sqrt{3a^2-x^2}\right]_0^{\sqrt{2}a}=\left(\sqrt{3}-1\right)a.$

(15) $\int_0^{1}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=-\int_0^{1}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\left(-\frac{t^2}{2}\right)=-\left[\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{1}=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$

(16) $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^2}\frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}}=2\left[\sqrt{1+\ln x}\right]_1^{e^2}=2\left(\sqrt{3}-1\right).$

(17) $\int_{-2}^{0}\frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2}=\int_{-2}^{0}\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+1}dx=\int_{-2}^{0}\left(\frac{x+1}{(x+1)^2+1}+\frac{1}{(x+1)^2+1}\right)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\arctan(1+x)\right]_{-2}^{0}=\frac{\pi}{2}.$$

(18) 令 $x=1+\tan t$，则 $dx=\sec^2 tdt$，因此

$$\int_0^2\frac{xdx}{(x^2-2x+2)^2}=\int_0^2\frac{xdx}{\left[(x-1)^2+1\right]^2}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan t)\sec^2 tdt}{\sec^4 t}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin t\cos t+\cos^2 t)dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}[\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

(19) 由于被积函数是奇函数，所以 $\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin xdx=0.$

(20) 由于被积函数是偶函数，所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos 2\theta+1}{2}\right)^2 d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta+1}{4}d\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}\cos 4\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}\right)d\theta=8\times\frac{3}{8}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}.$$

(21) 由于被积函数是偶函数，所以

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^2 d\arcsin x=\frac{2}{3}\left[\arcsin^3 x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi^3}{324}.$$

(22) 由于被积函数是奇函数，所以 $\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx=0.$

(23) 由于被积函数是偶函数，所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2 x)d\sin x=2\left[\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$$

(24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin xdx=-\frac{4}{3}\left[\cos^{\frac{3}{2}}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}.$

(25) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2}|\cos x|dx=\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx\right]$

$$=\sqrt{2}\left([\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=2\sqrt{2}.$$

(26) 令 $u=x+1$，则 $\int_0^{2\pi}|\sin(x+1)|dx=\int_1^{2\pi+1}|\sin u|du$．由于 $|\sin u|$ 是周期为 π 的周期函数，故 $\int_1^{2\pi+1}|\sin u|du=2\int_0^{\pi}\sin udu=-2[\cos u]_0^{\pi}=4$，所以 $\int_0^{2\pi}|\sin(x+1)|dx=4.$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

证明 令 $x=a+b-u$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(a+b-u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$

3. 证明 $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}(x>0)$.

证明 令 $t=\frac{1}{u}$，则 $\mathrm{d}t=-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$，故 $\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u}{1+\frac{1}{u^2}}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$

4. 证明 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$ （m， $n\in\mathrm{N}$）.

证明 令 $u=1-x$，则 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=-\int_1^0(1-u)^m u^n\mathrm{d}u=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x.$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$n\in\mathrm{Z}$，证明

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x=\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x .$$

证明 令 $x=u+\frac{n\pi}{2}$，则

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\left|\sin\left(u+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)\mathrm{d}u, & n\text{为偶数},\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)\mathrm{d}u, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\left|\cos\left(u+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\right)\mathrm{d}u=\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)\mathrm{d}u & n\text{为偶数},\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)\mathrm{d}u & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

由于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)\mathrm{d}u$，因此结论成立.

6. 若 $f(x)$ 是连续的奇函数，证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数；若 $f(x)$ 是连续的偶函数，证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数.

证明 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t\overset{t=-u}{=}\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x),$$

所以 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数. 同理可证另一部分.

7. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^1 xe^{-x}dx$; (2) $\int_1^e x\ln x dx$; (3) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega t dt$（$\omega$ 为常数）;

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx$; (5) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; (6) $\int_0^1 x\arctan x dx$;

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$; (8) $\int_1^2 x\log_2 x\, dx$; (9) $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2 dx$;

(10) $\int_1^e \sin(\ln x)\,dx$; (11) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$; (12) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx$ （$m\in N^+$）;

(13) $J_m=\int_0^{\pi} x\sin^m x dx$ （$m\in N^+$）.

解 (1) $\int_0^1 xe^{-x}dx=-\int_0^1 x de^{-x}=-\left[xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}-\left[e^{-x}\right]_0^1=1-\frac{2}{e}.$

(2) $\int_1^e x\ln x dx=\frac{1}{2}\int_1^e \ln x dx^2=\frac{1}{2}\left[x^2\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^e=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}.$

(3) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega t dt=-\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t d\cos\omega t=-\frac{1}{\omega}\left[t\cos\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}+\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos\omega t dt$

$=-\frac{2\pi}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\left[\sin\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}=-\frac{2\pi}{\omega^2}.$

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x d\cot x=-\left[x\cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot x dx=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+\left[\ln\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$

(5) $\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int_1^4\ln x d\sqrt{x}=2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^4-2\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx=8\ln 2-4\sqrt{x}\Big|_1^4=8\ln 2-4.$

(6) $\int_0^1 x\arctan x dx=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan x dx^2=\frac{1}{2}\left[x^2\arctan x\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$

(7) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}d\sin x=\left[e^{2x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x dx$

$=e^{\pi}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}d\cos x=e^{\pi}+2\left[e^{2x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx=e^{\pi}-2+4I$，故 $I=\frac{e^{\pi}-2}{5}.$

(8) $\int_1^2 x\log_2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\log_2 x\,dx^2=\frac{1}{2}\left[x^2\log_2 x\right]_1^2-\frac{1}{2\ln 2}\int_1^2 x dx=2-\frac{1}{4\ln 2}\left[x^2\right]_1^2=2-\frac{3}{4\ln 2}.$

(9) $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx=\int_0^{\pi}x^2\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}x^2 d\sin 2x$

$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\left[x^2\sin 2x\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\sin 2x dx=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}x d\cos 2x$

$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\left[x\cos 2x\right]_0^{\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2x dx=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}.$

(10) $I=\int_1^e \sin(\ln x)\,dx=\left[x\sin(\ln x)\right]_1^e-\int_1^e \cos(\ln x)\,dx$

$=e\sin 1-\left[x\cos(\ln x)\right]_1^e-\int_1^e \sin(\ln x)dx=e(\sin 1-\cos 1)+1-I$，故 $I=\dfrac{e(\sin 1-\cos 1)+1}{2}$.

(11) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|\,dx=-\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx+\int_1^e \ln x dx=\left[x\ln x\right]_1^e-\left[x\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^1+\int_{\frac{1}{e}}^1 dx-\int_1^e dx$

$=e-\dfrac{1}{e}+\left(1-\dfrac{1}{e}\right)-(e-1)=2-\dfrac{2}{e}.$

(12) 令 $x=\sin u$，则 $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}u\,du$. 再令 $I_{m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}u\,du$，从而

$$I_{m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m u\,d\sin u=\left[\cos^m u\sin u\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\cos^{m-1}u\,du$$

$$=m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-1}u\,du-I_{m+1}=mI_{m-1}-mI_{m+1},$$

故 $I_{m+1}=\dfrac{m}{m+1}I_{m-1}$. 由于 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}du=\dfrac{\pi}{2}$， $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du=\left[\sin u\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$，所以

$$I_{m+1}=\begin{cases}\dfrac{m}{m+1}\cdot\dfrac{m-2}{m-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}I_0, & m\text{为奇数},\\ \dfrac{m}{m+1}\cdot\dfrac{m-2}{m-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}I_1, & m\text{为偶数},\end{cases}$$

因此

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx=\begin{cases}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot m}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(m+1)}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m\text{为奇数},\\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot m}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(m+1)}, & m\text{为偶数}.\end{cases}$$

(13) 由于 $J_m=\int_0^{\pi} x\sin^m x dx\overset{x=\pi-u}{=}\int_{\pi}^0(\pi-u)\sin^m(\pi-u)\,d(\pi-u)=\int_0^{\pi}(\pi-u)\sin^m u\,du$

$$=\pi\int_0^{\pi}\sin^m u\,du-J_m=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^m u\,du=\frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m u\,du+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^m u\,du\right]$$

$$\overset{u=\frac{\pi}{2}+t}{=}\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m u\,du+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\,dt\right)=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m u\,du$$

故

$$J_m=\begin{cases}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot m}\cdot\dfrac{\pi^2}{2}, & m\text{为正偶数},\\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(m-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot m}\cdot\pi, & m>1\text{为正奇数}.\end{cases}$$

$J_1=\int_0^{\pi}x\sin x dx=-\left[x\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx=\pi+\left[\sin x\right]_0^{\pi}=\pi.$

习题 5-4

1. 判断下列各反常积分的收敛性，如果收敛，计算反常积分的值.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ (2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$; (3) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x(a>0)$; (4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}$;

(5) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t\ (P>0,\omega>0)$; (6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$; (7) $\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(8) $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$; (9) $\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$; (10) $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

解 (1) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{\mathrm{d}x}{x^4}=-\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{3x^3}\right]_1^t=-\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}.$

(2) $\int_1^t\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}\right]_1^t=2\sqrt{t}-2$，由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$，所以$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$发散.

(3) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\left[\mathrm{e}^{-ax}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{a}.$

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\arctan x\right]_0^{+\infty}$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{4}.$$

(5) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t=-\frac{1}{\omega}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}\cos\omega t=-\frac{1}{\omega}\left[\mathrm{e}^{-pt}\cos\omega t\right]_0^{+\infty}-\frac{p}{\omega}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\cos\omega t\mathrm{d}t$

因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\cos\omega t=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\cos\omega t}{\mathrm{e}^{pt}}=0$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t&=\frac{1}{\omega}-\frac{p}{\omega^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}\sin\omega t\\&=\frac{1}{\omega}-\frac{p}{\omega^2}\left[\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\right]_0^{+\infty}-\frac{p^2}{\omega^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\omega}-\frac{p^2}{\omega^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

故$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t=\frac{\omega}{\omega^2+p^2}$.

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}=\left[\arctan(x+1)\right]_{-\infty}^0+\left[\arctan(x+1)\right]_0^{+\infty}$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi.$$

(7) $\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=-\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1=1.$

(8) $\int_0^t\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}=\left[\frac{1}{1-x}\right]_0^t=\frac{1}{1-t}-1$，由于 $\lim\limits_{t\to1^-}\frac{1}{1-t}$ 不存在，故原反常积分发散.

(9) 令 $u=\sqrt{x-1}$，则 $x=u^2+1$，$\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$，从而

$$\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}=\int_0^1\frac{(u^2+1)2u\mathrm{d}u}{u}=2\left[\frac{1}{3}u^3+u\right]_0^1=\frac{8}{3}.$$

(10) $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\left[\arcsin\ln x\right]_1^{\mathrm{e}}=\frac{\pi}{2}.$

2. 当 k 为何值时，反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 收敛？当 k 为何值时，该反常积分发散？又当 k 为何值时，该反常积分取得最小值？

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\int\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^k}=\begin{cases}\ln\ln x+C, & k=1,\\ -\dfrac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x}+C, & k\neq 1,\end{cases}$$

因此当 $k\leqslant 1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 发散；当 $k>1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 收敛，此时

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=-\left[\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x}\right]_2^{+\infty}=\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}2}.$$

记 $f(x)=\frac{1}{(x-1)\ln^{x-1}2}(x>1)$，则

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2\ln^{2x-2}2}\left[\ln^{x-1}2+(x-1)\ln^{x-1}2\ln\ln 2\right]=-\frac{1+(x-1)\ln\ln 2}{(x-1)^2\ln^{x-1}2},$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$. 当 $1<x<1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时 $f'(x)>0$，所以 $f(x)=\frac{1}{(x-1)\ln^{x-1}2}(x>1)$ 在 $x=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 处取到最小值，即反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 当 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时取得最小值.

3. 利用递推公式计算反常积分 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\quad(n\in\mathrm{N})$.

解 $I_0=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty}=1$，当 $n\geqslant 1$ 时，

$$I_n=-\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-\left[x^n\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}\quad\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n!}{\mathrm{e}^x}=0$，所以 $I_n=nI_{n-1}$，故 $I_n=n!I_0=n!$.

4. 计算反常积分 $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，所以 $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$ 是一反常积分，且

$$\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=\left[x\ln x\right]_0^1-\int_0^1 x\mathrm{d}\ln x=\left[x(\ln x-1)\right]_0^1=-1-\lim_{x\to 0^+}\left[x(\ln x-1)\right]=-1.$$

习题 5-5*

1. 判定下列反常积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$； (2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$； (3) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$； (4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$；

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$； (6) $\int_1^{2}\frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^3}$； (7) $\int_0^{1}\frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$； (8) $\int_1^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$.

解 (1) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=1$，因此 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$ 收敛.

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}}\cdot\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=1$，因此 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ 收敛.

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}=1$，因此 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

(4) 由于当 $x\geqslant 0$ 时 $\dfrac{1}{1+x|\sin x|}\geqslant\dfrac{1}{1+x}$，且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ 发散，因此 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(5) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\dfrac{x\arctan x}{1+x^3}=\dfrac{\pi}{2}$，因此 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$ 收敛.

(6) $x=1$ 是被积函数的瑕点，且 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\cdot\dfrac{1}{(\ln x)^3}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{3(\ln x)^2}=+\infty$，因此 $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^3}$ 发散.

(7) $x=1$ 是被积函数的瑕点，而 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}=\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)}}=\dfrac{1}{2}$，因此

$\displaystyle\int_0^1\frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$ 收敛.

(8) 被积函数有两个瑕点: $x=1$，$x=2$．由于 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=-1$，因此

$\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛；由于 $\lim\limits_{x\to2^-}(x-2)^{\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=1$，因此 $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛，故 $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛.

2. 设反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

证明 由于 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\left[f^2(x)+\dfrac{1}{x^2}\right]$，且 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 均收敛，因此 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x$ 收敛，即 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

3. 用 Γ 函数表示下列积分，并指出这些积分的收敛范围.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x\,(n>0)$；(2) $\displaystyle\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x$； (3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x\quad(n\neq0)$.

解 (1) 令 $u=x^n$，则 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u$，故 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$，在 $n>0$ 时收敛.

(2) 令 $u=\ln\dfrac{1}{x}$，则 $x=\mathrm{e}^{-u}$，$\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$，且

$$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x=-\int_{+\infty}^0u^p\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}u^p\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\Gamma(p+1),$$

其在 $p>-1$ 时收敛.

(3) 令 $u=x^n$，则 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u$.

当 $n>0$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}u^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$，

当 $n<0$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}u^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=-\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$，

故 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$，当 $\dfrac{m+1}{n}>0$ 时都收敛.

4. 证明 $\Gamma\left(\dfrac{2k+1}{2}\right)=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}$，其中 $k\in\mathrm{N}^+$.

证明
$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{2k-1}{2}\Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right)=\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\Gamma\left(\frac{2k-3}{2}\right)$$
$$=\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}.$$

5. 证明以下各式（其中 $n\in\mathrm{N}^+$）.

(1) $2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n\Gamma(n+1)$；　　(2) $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\dfrac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$；

(3) $\sqrt{\pi}\Gamma(2n)=2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$（勒让德倍量公式）.

证明 (1) $2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n n!=2^n\Gamma(n+1)$.

(2) $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\dfrac{(2n-1)!}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}=\dfrac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}(n-1)!}=\dfrac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$.

(3) 因为 $\sqrt{\pi}\Gamma(2n)=\sqrt{\pi}(2n-1)!$，

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=(n-1)!\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}{2^{n-1}}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!}{2^{2n-1}}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n)}{2^{2n-1}},$$

所以 $\sqrt{\pi}\Gamma(2n)=2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$.

总习题五

1. 填空.

(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的________条件，而函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的________条件;

(2) 对 $[a,+\infty)$ 上非负、连续的函数 $f(x)$，它的变上限积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,+\infty)$ 有界是反常积分 $\int_a^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$ 收敛的________条件;

*(3) 绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ 一定___________;

(4) 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义且 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积，此时积分 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ________存在.

(5) 设函数 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t^2-x^2)\mathrm{d}t=$________.

解 (1) 必要，充分. (2) 充分，必要. (3) 收敛.

(4) 不一定. 如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为无理数},\\ -1, & x\text{为有理数},\end{cases}$ 则 $|f(x)|=1$ 在 $[a,b]$ 上可积，而 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

(5) 令 $u=t^2-x^2$，则 $\int_0^x tf(t^2-x^2)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_0^x f(t^2-x^2)\,\mathrm{d}(t^2-x^2)=\dfrac{1}{2}\int_{-x^2}^0 f(u)\,\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{2}\int_0^{-x^2} f(u)\mathrm{d}u$,

所以 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t^2-x^2)\,\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}f(-x^2)(-2x)=xf(-x^2)$.

2. 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论.

(1) 设 $I=\int_0^1 \dfrac{x^4}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$，则估计 I 的大致范围为（　　）.

A. $0\leqslant I\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}\leqslant I\leqslant\dfrac{1}{5}$　　C. $\dfrac{1}{5}<I<1$　　D. $I\geqslant 1$

(2) 设函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，则必有（　　）.

A. $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数　　B. $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是偶函数

C. $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是周期函数　　D. $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是单调函数

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}x^4\leqslant\dfrac{x^4}{\sqrt{1+x}}\leqslant x^4$. 所以

$$\frac{\sqrt{2}}{10}=\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^5}{5\sqrt{2}}\right]_0^1\leqslant\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5}.$$ 故选 B.

(2) 记 $G(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 又因为

$G(x)$ 是偶(奇)函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇(偶)函数,

且 $F(x)=G(x)+C$，其中 C 是一常数，即为偶函数，故应选 A.

3. 回答下列问题.

(1) 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant g(x)$，那么 $\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ 在几何上表示什么?

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，那么 $\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示什么?

(3) 如果在时刻 t 以 $\varphi(t)$ 的流量（单位时间内流过的流体的体积或质量）向一水池注水，那么 $\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)\mathrm{d}t$ 表示什么?

(4) 如果某国人口增长的速率为 $u(t)$，那么 $\int_{T_1}^{T_2}u(t)\mathrm{d}t$ 表示什么?

(5) 如果一公司经营某种产品的边际利润函数为 $P'(x)$，那么 $\int_{1000}^{2000} P'(x)\mathrm{d}x$ 表示什么?

解 (1) $\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 及直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成图形的面积.

(2) $\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$ 表示 xOy 面上，由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$ 与 $x=b$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

(3) $\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\mathrm{d}t$ 表示在时间段 $[t_1,t_2]$ 内向水池注水的总量.

(4) $\int_{T_1}^{T_2} u(t)\mathrm{d}t$ 表示该国在 $[T_1,T_2]$ 时间段内增加的人口总量.

(5) $\int_{1000}^{2000} P'(x)\mathrm{d}x$ 表示该公司从生产第 1000 个产品起到生产第 2000 个产品的利润总量.

***4**. 利用定积分的定义计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\left[\dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=\dfrac{1}{p+1}.$

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 连续；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\overset{\text{洛必达}}{=}\lim\limits_{x\to a}\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)\right]=af(a).$

(2) 当 $x>\tan 1$ 时，$\arctan x>1$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t\geqslant\lim_{x\to+\infty}\int_{\tan 1}^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t\geqslant\lim_{x\to+\infty}(x-\tan 1)=+\infty.$$

所以由洛必达法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

6. 下列计算是否正确，试说明理由.

(1) $\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\left[-\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]_{-1}^{1}=-\dfrac{\pi}{2}$；

(2) 因为 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\overset{x=\frac{1}{t}}{=}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$，所以 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=0$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0.$

解 (1) 不对．因为 $u=\frac{1}{x}$ 在区间 $[-1,1]$ 上有间断点，不符合换元法的要求．事实上，

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\left[\arctan x\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}.$$

(2) 不对．原因同(1)．事实上，

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(3) 不对．因为 $\int_{0}^{A}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_{0}^{A}=\frac{1}{2}\ln(1+A^2)$，所以当 $A\to+\infty$ 时极限不存在，即 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散，从而得到 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散．

7. 设 $x>0$，证明

$$\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

证明 令 $u=\frac{1}{t}$，则 $\int_{0}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_{+\infty}^{x}\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\mathrm{d}\frac{1}{u}=-\int_{+\infty}^{x}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$，从而

$$\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\left[\arctan t\right]_{0}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

8. 设 $p>0$，证明

$$\frac{p}{p+1}<\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}<1.$$

证明 由于当 $p>0$ 时，$0<\frac{1}{1+x^p}<1$，故 $\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}<1$；又

$$1-\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}=\int_{0}^{1}\frac{x^p\mathrm{d}x}{1+x^p}<\int_{0}^{1}x^p\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{p+1},$$

故 $\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}>1-\frac{1}{1+p}=\frac{p}{1+p}$，从而结论成立．

9. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，证明：

(1) $\left(\int_{a}^{b}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_{a}^{b}f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_{a}^{b}g^2(x)\,\mathrm{d}x$ （柯西–施瓦茨不等式）；

(2) $\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ （闵可夫斯基不等式）.

证明 (1) 对任意的实数λ，有$\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant 0$，即

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

它的左端是关于λ的二项三项式，它非负的条件是判别式非正，即

$$4\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 - 4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

即结论成立.

(2) $$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

10. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$. 证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \geqslant (b-a)^2.$$

证明 根据上题的(1)可知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \geqslant \left(\int_a^b \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\sqrt{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2 = (b-a)^2.$$

11. 计算下列积分.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$；(3) $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$；(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$； (6) $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x$； (7) $\int_0^{\pi} x^2|\cos x|\mathrm{d}x$；

(8) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}$； (9) $\int_{1/2}^{3/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-x|}}$； (10) $\int_0^x \max\{t^3,t^2,1\}\mathrm{d}t$.

解 (1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}(\cos x+1)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\tan\frac{x}{2} - [\ln(1+\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad = \left[x\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x + \ln 2$$

$$=\frac{\pi}{2}+\ln 2+2\left[\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$，而

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]\mathrm{d}x\overset{\frac{\pi}{4}-x=t}{=}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}(\ln\sqrt{2}+\ln\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi\ln 2}{8}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t,$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\frac{\pi\ln 2}{8}.$

(3) 令 $x=a\sin t$，则

$$\int_0^{a}\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\mathrm{d}t}{\sin t+a\cos t}\right]=\frac{\pi}{4}.$$

注：此题用到公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$.

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$

$$=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}-[\cos x+\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}-2.$$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{1+\sec^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\tan x}{2+\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(6) $\int_0^{\pi}x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x|\cos x|\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\sin x\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\cos x\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{4}\left[\left[\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\sin^2 x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]=\frac{\pi}{2}.$$

注：此题用到公式 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$.

(7) $\int_0^{\pi}x^2|\cos x|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x^2\cos x\mathrm{d}x$，而

$$\int x^2\cos x\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}\sin x=x^2\sin x-2\int x\sin x\mathrm{d}x$$

$$=x^2\sin x+2\int x\mathrm{d}\cos x=x^2\sin x+2x\cos x-2\int\cos x\mathrm{d}x$$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$

所以

$$\int_0^{\pi} x^2|\cos x|\mathrm{d}x = \left[x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}+2\pi-4.$$

(8) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^2} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{x-1}}{\mathrm{e}^{2(x-1)}+1} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}\left[\arctan\mathrm{e}^{x-1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\mathrm{e}^{-1}\right).$

(9) $\displaystyle\int_{1/2}^{3/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-x|}} = \int_{1/2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{3/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}$，而 $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \int_{1/2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1/4-(x-1/2)^2}}$

$$=\left[\arcsin(2x-1)\right]_{1/2}^{1} = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_1^{3/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}} = \int_1^{3/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1/2)^2-1/4}} = \left[\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x}\right|\right]_1^{3/2} = \ln(2+\sqrt{3}),$$

所以
$$\int_{1/2}^{3/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-x|}} = \frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$$

(10) 因为当 $t<-1$ 时 $t^3<1<t^2$，当 $-1<t<1$ 时 $t^3<t^2<1$，当 $t>1$ 时 $t^3>t^2>1$，故

当 $x<-1$ 时，$\displaystyle\int_0^x \max\{t^3,t^2,1\}\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 \max\{t^3,t^2,1\}\,\mathrm{d}t = -\left(\int_x^{-1}t^2\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}1\mathrm{d}t\right) = \frac{x^3-2}{3}$；

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\displaystyle\int_0^x \max\{t^3,t^2,1\}\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\mathrm{d}t = x$；

当 $x>1$ 时，$\displaystyle\int_0^x \max\{t^3,t^2,1\}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\mathrm{d}t+\int_1^x t^3\mathrm{d}t = \frac{x^4+3}{4}$；

所以

$$\int_0^x \max\{t^3,t^2,1\}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{x^3-2}{3}, & x<-1, \\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ \dfrac{x^4+3}{4}, & x>1. \end{cases}$$

12. 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明

$$\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

证明　根据分部积分公式可得

$$\int_0^x\left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = \left[t\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]_0^x - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

13. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)>0$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)},\quad x\in[a,b].$$

证明: (1) $F'(x)\geqslant 2$; (2) 方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

证明　(1) $F'(x) = f(x)+\dfrac{1}{f(x)} \geqslant 2\cdot\sqrt{f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}} = 2.$

(2) 因为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 所以 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上也连续, 且有

$$F(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t+\int_b^a \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}=-\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x<0,$$

$$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_b^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0,$$

所以由闭区间上连续函数的性质可知, $F(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一个零点, 再根据(1)知 $F(x)$ 在 (a,b) 内单调上升, 故零点唯一, 即方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

14. 求 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0.\end{cases}$

解 令 $u=x-1$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x&=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x+\int_{-1}^0\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x\\&=\left[\ln(1+x)\right]_0^1+\int_{-1}^0\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\ln 2-\int_{-1}^0\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}\\&=\ln 2-\left[\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\right]_{-1}^0=\ln(1+\mathrm{e}).\end{aligned}$$

15. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且不变号. 证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使下式成立:

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \text{ (积分第一中值定理)}.$$

证明 不妨设 $g(x)\geqslant 0$, 由定积分的性质得 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$. 记 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值为 M 、最小值为 m, 则有

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

故

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$ 时, 由上述不等式可知 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$, 此时 ξ 可取区间 $[a,b]$ 内的任何一点, 从而结论成立.

当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$ 时, 有 $m\leqslant\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\leqslant M$, 由闭区间上连续函数的性质, 知至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$, 即 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

***16**. 证明 $\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x (n>1)$，并用它证明

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Gamma(n+1) \quad (n \in \mathrm{N}).$$

证明 当 $n>1$ 时,

$$\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2} = -\frac{1}{2}\left[x^{n-1}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{n-1}}{\mathrm{e}^{x^2}} + \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

记 $I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，则由上述结论可得

$$I_n = \frac{2n+1-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2n+1-2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = n\int_0^{+\infty} x^{2(n-1)+1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = nI_{n-1},$$

故 $I_n = nI_{n-1} = n!I_0 = n!\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{n!}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2} = -\frac{n!}{2}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{n!}{2} = \frac{1}{2}\Gamma(n+1)$.

***17**. 判断下列反常积分的收敛性.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$； (2) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$；(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x$； (4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$.

解 (1) $x=0$ 是被积函数 $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}$ 的瑕点，且 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}=1$，故 $\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 收敛；又由于 $|f(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^3}}$，且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$. 所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) $x=2$ 是被积函数 $f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 的瑕点，由于

$\lim\limits_{x\to2^+}\sqrt[3]{x-2}\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}} = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x-1}} = \frac{1}{2}$，故 $\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛；

又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=1$，故 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛；因此 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛.

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\sin x}{\ln x} = \left[\frac{\sin x}{\ln x}\right]_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty}\frac{\sin x\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x - \frac{\sin 2}{\ln 2}$，

由于 $\left|\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\right|\leqslant\frac{1}{x\ln^2 x}(x>2)$，且 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$ 收敛，故 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛，从而 $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x$ 收敛.

(4) $x=0$，$x=1$，$x=2$ 是被积函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 的瑕点，由于

$$\lim_{x\to0^+}x^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

$$\lim_{x\to1}(x-1)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-2)}}=-1,$$

$\lim\limits_{x\to2^-}(x-2)^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$，故$\displaystyle\int_0^3\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$收敛;

又因为$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}=1$，故$\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$收敛;

因此$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$收敛.

***18.** 计算下列反常积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$；　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ $(\alpha\geqslant0)$.

解　(1) $x=0$是被积函数$f(x)=\ln\sin x$的瑕点，而

$$\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\ln\sin x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x}{x^{-\frac{1}{2}}}=-2\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}\cos x}{\sin x}=0,$$

故$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$收敛.

又$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$，令$x=\dfrac{\pi}{2}-u$，则

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)d\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u du,$$

故$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln\sin 2x-\ln 2)dx$

又因为$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2x dx\overset{2x=t}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt$，所以$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx-\frac{\pi}{4}\ln2=-\frac{\pi}{2}\ln2$.

(2) 记函数$f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$，则当$\alpha=0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2(1+x^2)}=\dfrac{1}{2}$,

当$\alpha>0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=0$，因此$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$收敛.

令$x=\dfrac{1}{t}$，则$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_{+\infty}^{0}\frac{d\frac{1}{t}}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)}=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.$$

第 6 章

定积分的应用

一、基本内容

1. 定积分的元素法
2. 平面图形的面积
3. 体积
   (1) 旋转体的体积;
   (2) 平行截面面积为已知的立体的体积.
4. 平面曲线的弧长
   (1) 由参数方程表示的曲线的弧长;
   (2) 由直角坐标方程表示的曲线的弧长;
   (3) 由极坐标方程表示的曲线的弧长.
5. 变力沿直线所作的功
6. 水压力和引力的求法如同变力沿直线所作的功

二、基本要求

1. 理解定积分的元素法
2. 熟练求解平面图形的面积、旋转体的体积及平面曲线的弧长
3. 了解变力沿直线所作的功的求法
4. 了解水压力、引力的求法

三、习题解答

习题 6-1

1. 求图 6-1 中画斜线的各部分的面积.

解 (1) 解方程组 $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x, \end{cases}$ 得到交点坐标为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.

如取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[0,1]$, 因此有

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

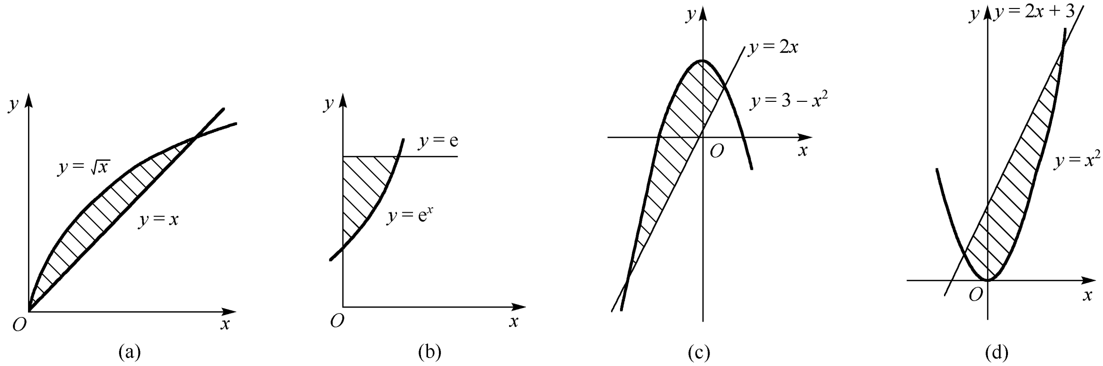


图 6-1

如取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[0,1]$，因此有

$$A=\int_0^1(y-y^2)\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

(2) 如取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[0,1]$，因此有

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}x-\mathrm{e}^x\right]_0^1=1.$$

如取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[1,\mathrm{e}]$，因此有

$$A=\int_1^{\mathrm{e}}\ln y\mathrm{d}y=\left[y\ln y\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}y=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$$

(3) 解方程组 $\begin{cases}y=2x\\y=3-x^2\end{cases}$ 得到交点坐标为 $(-3,-6)$ 和 $(1,2)$.

如取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[-3,1]$，因此有

$$A=\int_{-3}^1(-x^2-2x+3)\mathrm{d}x=\left[\frac{-1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^1=\frac{32}{3}.$$

如取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[-6,3]$，因此有

$$A=\int_{-6}^2\left(\frac{y}{2}+\sqrt{3-y}\right)\mathrm{d}y+\int_2^3 2\sqrt{3-y}\mathrm{d}y=\left[\frac{y^2}{4}-\frac{2}{3}(3-y)^{3/2}\right]_{-6}^2+\left[\frac{-4}{3}(3-y)^{3/2}\right]_2^3=\frac{32}{3}.$$

(4) 解方程组 $\begin{cases}y=2x+3,\\y=x^2,\end{cases}$ 得到交点坐标为 $(-1,1)$ 和 $(3,9)$，如取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[-1,3]$，因此有

$$A=\int_{-1}^3(2x+3-x^2)\mathrm{d}x=\left[x^2+3x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^3=\frac{32}{3}.$$

2. 求由下列各组曲线所围成的图形的面积.

(1) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$（两部分都要计算）；

(2) $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$；

(3) $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$ 与直线 $x = 1$;

(4) $y = \ln x$, y 轴与直线 $y = \ln a$, $y = \ln b$ ($b > a > 0$).

解 (1) 如图 6-2 所示, 先计算图形 D_1 的面积.

解方程组 $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases}$ 求得交点为 $(-2,2)$ 和 $(2,2)$. 取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[-2,2]$, 因此有

$$A_1 = \int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2}\left(\sqrt{8-x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2} + 4\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

图形 D_2 的面积为 $A_2 = \pi(2\sqrt{2})^2 - \left(2\pi + \dfrac{4}{3}\right) = 6\pi - \dfrac{4}{3}$.

(2) 如图 6-3 所示, 取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[1,2]$, 因此有

$$A = \int_{1}^{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln x\right]_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2.$$

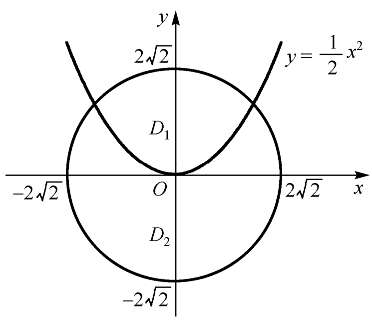


图 6-2

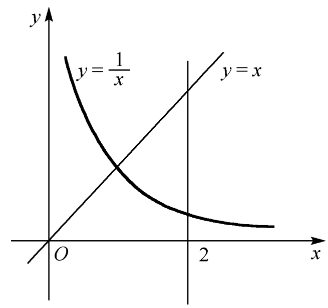


图 6-3

(3) 如图 6-4 所示, 取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[0,1]$, 因此有

$$A = \int_{0}^{1}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} - 2.$$

(4) 如图 6-5 所示, 取 y 为积分变量, 则 y 的变化范围为 $[\ln a, \ln b]$, 因此有

$$A = \int_{\ln a}^{\ln b}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y = \left[\mathrm{e}^y\right]_{\ln a}^{\ln b} = b - a.$$

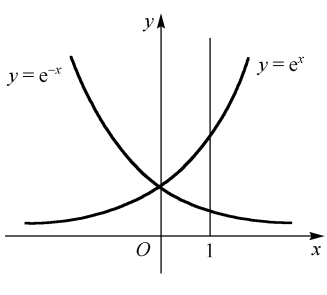


图 6-4

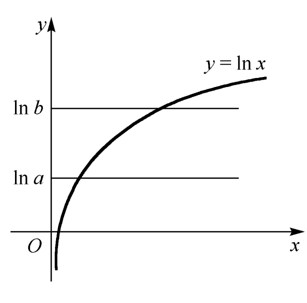


图 6-5

3. 求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围成的图形的面积.

解 先求导数 $y'|_{x=0}=4$，$y'|_{x=3}=-2$，所以抛物线在点 $(0,-3)$，$(3,0)$ 处的切线斜率分别为 $4,-2$，因此抛物线在点 $(0,-3)$，$(3,0)$ 处的切线分别为 $y=4x-3$，$y=-2x+6$.

解方程组 $\begin{cases} y=4x-3 \\ y=-2x+6 \end{cases}$，得两切线的交点为 $(3/2,3)$（如图 6-6 所示），因此所求面积为

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}[4x-3-(-x^2+4x-3)]\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}[-2x+6-(-x^2+4x-3)]\,\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.$$

4. 求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点$(p/2,\ p)$处的法线所围成的图形的面积.

解 由隐函数求导法则, 抛物线方程 $y^2=2px$ 两端分别对 x 求导得 $2yy'=2p$，从而有 $y'|_{(p/2,p)}=1$，即切线斜率为 1，故法线斜率为 $k=-1$，从而得到法线方程为 $y=-x+\dfrac{3}{2}p$（如图 6-7 所示），因此所求面积为

$$A=\int_{-3p}^{p}\left(-y+\frac{3}{2}p-\frac{1}{2p}y^2\right)\mathrm{d}y=\left[-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}py-\frac{1}{6p}y^3\right]_{-3p}^{p}=\frac{16}{3}p^2.$$

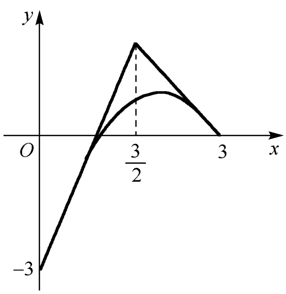


图 6-6

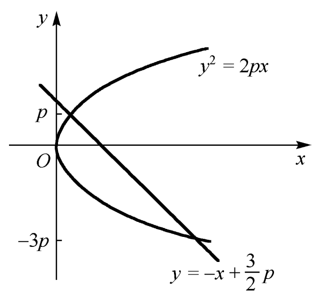


图 6-7

5. 求由下列各曲线所围成的图形的面积.

(1) $\rho=2a\cos\theta$； (2) $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$； (3) $\rho=2a(2+\cos\theta)$.

解 (1) 转化为直角坐标为 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta=2a\cos^2\theta \\ y=\rho\sin\theta=2a\cos\theta\sin\theta \end{cases}$，知 $(x-a)^2+y^2=a^2$，所以此曲线的图像为圆心在 $(a,0)$、半径为 a 的圆. 图像如图 6-8 所示, 所以面积为

$$A=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=4a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\pi a^2.$$

(2) 此曲线为星形线, 图像如图 6-9 所示, 所求面积为第一象限部分面积的 4 倍, 记曲线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 上的点为 (x,y)，因此

$$\begin{aligned}A&=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\pi/2}^{0}a\sin^3 t\mathrm{d}(a\cos^3 t)=4a^2\int_{\pi/2}^{0}[a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)]\,\mathrm{d}t\\&=12a^2\int_0^{\pi/2}(\sin^4 t-\sin^6 t)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2.\end{aligned}$$

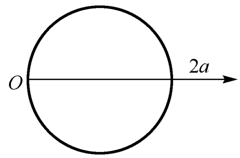


图 6-8

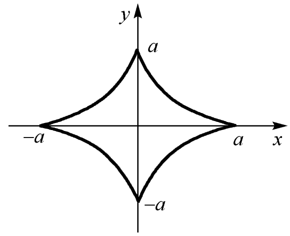


图 6-9

(3) 此曲线为心形线, 图像如图 6-10 所示, 所求面积为极轴上方部分面积的 2 倍, 因此

$$A=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[2a(2+\cos\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta=4a^2\int_0^{\pi}(4+4\cos\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4a^2\int_0^{\pi}(4+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta=4a^2\left(4\pi+\int_0^{\pi}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\right)=18\pi a^2.$$

6. 求由摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与横轴所围成的图形的面积.

解 摆线的一拱图形如图 6-11 所示, 本题做法与题 5 中的(2)类似. 以 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[0,2\pi a]$, 设摆线上的点为 (x,y), 则所求面积为

$$A=\int_0^{2\pi a}y\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\,\mathrm{d}a(t-\sin t)=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$=a^2\left(2\pi-2\sin t\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2t}{2}\,\mathrm{d}t\right)=3\pi a^2.$$

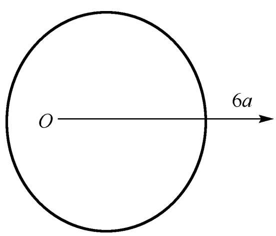


图 6-10

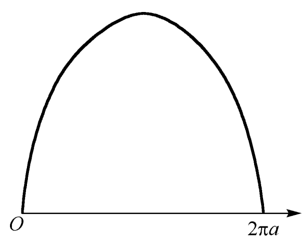


图 6-11

7. 求对数螺线 $\rho=a\mathrm{e}^{\theta}\,(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 及射线 $\theta=\pi$ 所围成的图形的面积.

解 对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{a\theta}$ 图像如图 6-12 所示, 对数螺线 $\rho=a\mathrm{e}^{\theta}\,(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 图像如图 6-13 所示, 则

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(a\mathrm{e}^{\theta})^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{4}\left[\mathrm{e}^{2\theta}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{a^2}{4}(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}).$$

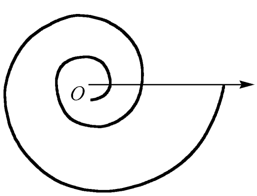


图 6-12

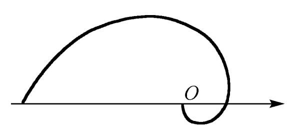


图 6-13

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积.

(1) $\rho=3\cos\theta$ 及 $\rho=1+\cos\theta$；(2) $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $\rho^2=\cos 2\theta$.

解 (1) 图像如图 6-14 所示，首先求出两曲线交点为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 和 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{-\pi}{3}\right)$，由对称性知所求面积为极轴上面部分面积的 2 倍，则

$$\begin{aligned}A&=2\left[\int_0^{\pi/3}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{2}(3\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta\right]\\&=2\left[\int_0^{\pi/3}\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta+2\cos\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{9}{2}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\right]\\&=2\left[\int_0^{\pi/3}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\cos 2\theta}{2}+2\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta+\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{9}{2}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta\right]\\&=\frac{5}{4}\pi.\end{aligned}$$

(2) 图像如图 6-15 所示，首先求出两曲线交点为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\pi}{6}\right)$ 和 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{5}{6}\pi\right)$，由图形的对称性知

$$\begin{aligned}A&=2\left[\int_0^{\pi/6}\frac{1}{2}(\sqrt{2}\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{1}{2}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\right]\\&=2\int_0^{\pi/6}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/4}\\&=\int_0^{\pi/6}(1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta+\frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

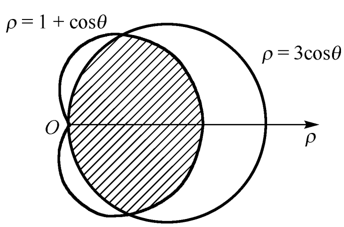


图 6-14

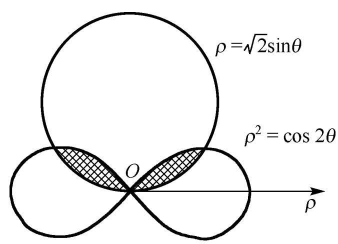


图 6-15

9. 求位于曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 下方，该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积.

解 先求曲线过原点的切线方程，设切点为 (x_0,y_0)，其中 $y_0=\mathrm{e}^{x_0}$，则切线的斜率为 e^{x_0}，故切线方程为

$$y-y_0=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0),$$

因为该曲线过原点，所以有 $y_0=\mathrm{e}^{x_0}x_0$，解得 $x_0=1$，$y_0=\mathrm{e}$，所以切线方程为 $y=\mathrm{e}x$.

如图 6-16 所示，可知所求面积为

$$A=\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x)\,\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x\right]_{-\infty}^0+\left[\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}}{2}x^2\right]_0^1=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

10. 求由抛物线 $y^2=4ax$ 与过焦点的弦所围成的图形面积的最小值.

解 图像如图 6-17 所示, 抛物线的焦点为 $(a,0)$, 设过焦点的直线为 $y=k(x-a)$, 则该直线与抛物线的交点的纵坐标为 $y_1=\dfrac{2a-2a\sqrt{1+k^2}}{k}$, $y_2=\dfrac{2a+2a\sqrt{1+k^2}}{k}$, 面积为

$$A=\int_{y_1}^{y_2}\left(a+\frac{y}{k}-\frac{y^2}{4a}\right)\mathrm{d}y=a(y_2-y_1)+\frac{y_2^2-y_1^2}{2k}-\frac{y_2^3-y_1^3}{12a}$$

$$=\frac{8a^2(1+k^2)^{3/2}}{3k^3}=\frac{8a^2}{3}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{3/2},$$

所以面积是关于 k 的单调递减函数, 当 $k\to+\infty$ 即弦为 $x=a$ 时面积取到最小值, 最小值为 $\dfrac{8}{3}a^2$.

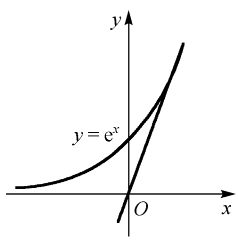


图 6-16

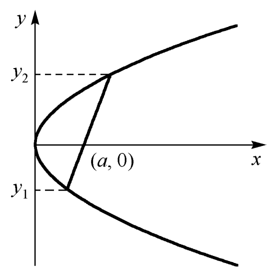


图 6-17

11. 已知抛物线 $y=px^2+qx$ (其中 $p<0,q>0$) 在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切, 且此抛物线与 x 轴所围成的图形的面积为 A. 问 p 和 q 为何值时 A 达到最大值, 并求出此最大值.

解 抛物线与 x 轴交点的横坐标为 $x_1=0,x_2=-\dfrac{q}{p}$. 抛物线与 x 轴所围成的图形的面积为

$$A=\int_0^{-\frac{q}{p}}(px^2+qx)\,\mathrm{d}x=\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2\bigg|_0^{-\frac{q}{p}}=\frac{q^3}{6p^2}.$$

因直线 $x+y=5$ 与抛物线 $y=px^2+qx$ 相切, 所以它们有唯一交点. 由方程组 $\begin{cases}x+y=5\\y=px^2+qx\end{cases}$ 得 $px^2+(q+1)x-5=0$, 由判别式 $\Delta=(q+1)^2+20p=0$, 解得 $p=-\dfrac{1}{20}(1+q)^2$, 代入面积得 $A(q)=\dfrac{200q^3}{3(1+q)^4}$. 令 $A'(q)=0$ 得唯一驻点 $q=3$. 当 $0<q<3$ 时, $A'(q)>0$, 当 $q>3$ 时 $A'(q)<0$. 于是当 $q=3$ 时 $A(q)$ 取极大值也是最大值. 此时 $p=-\dfrac{4}{5}$, 最大值 $A=\dfrac{225}{32}$.

12. 由 $y=x^3$, $x=2$, $y=0$ 所围成的图形, 分别绕 x 轴及 y 轴旋转, 计算所得两个旋转体的体积.

解 (1) 图形绕 x 轴旋转, 体积为

$$V=\int_0^2\pi(x^3)^2\mathrm{d}x=\int_0^2\pi x^6\mathrm{d}x=\left[\frac{\pi}{7}x^7\right]_0^2=\frac{128}{7}\pi.$$

(2) 图形绕 y 轴旋转，则该立体可视为圆柱体（即由 $x=2$, $y=8$, $x=0$, $y=0$ 所围成的图形绕 y 轴旋转所得的立体）减去由曲线 $x=\sqrt[3]{y}$, $y=8$, $x=0$ 所围成的图形绕 y 轴旋转所得的立体，因此体积为

$$V=\pi\cdot 2^2\cdot 8-\int_0^8\pi(\sqrt[3]{y})^2\,\mathrm{d}y=32\pi-\int_0^8\pi y^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}y=32\pi-\left[\pi\frac{3}{5}\cdot y^{\frac{5}{3}}\right]_0^8=\frac{64}{5}\pi .$$

13. 把星形线 $x^{3/2}+y^{3/2}=a^{3/2}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转，计算所得旋转体的体积.

解 记 x 轴上方第一象限部分的星形线的函数为 $y=y(x)$ ，则曲线 $y=y(x)$ 与 x 轴、 y 轴所围成图形绕 x 轴旋转得到的立体的体积的 2 倍即为所求体积，因此有

$$V=2\int_0^a\pi y^2\mathrm{d}x .$$

由于星形线的参数方程为 $x=a\cos^3 t$ ， $y=a\sin^3 t$ ，所以对上述积分做换元得

$$\begin{aligned}V&=2\int_{\pi/2}^0\pi(a\sin^3 t)^2\mathrm{d}a\cos^3 t=2\int_{\pi/2}^0-3\pi a^3\sin^7 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\&=6\pi a^3\int_{\pi/2}^0\sin^6 t\cos^2 t\,\mathrm{d}\cos t=6\pi a^3\int_{\pi/2}^0(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\,\mathrm{d}\cos t\\&\overset{s=\cos t}{=}6\pi a^3\int_0^1(1-s^2)^3s^2\mathrm{d}s=6\pi a^3\int_0^1(-s^8+3s^6-3s^4+s^2)\,\mathrm{d}s\\&=\frac{32}{105}\pi a^3.\end{aligned}$$

14. 用积分方法证明图 6-18 中球缺的体积为

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

解 该立体可视为由曲线 $x=\sqrt{R^2-y^2}$, $y=R-H$ 和 $x=0$ 所围成的图形绕 y 轴旋转所得，因此体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_{R-H}^R\pi(\sqrt{R^2-y^2})^2\mathrm{d}y=\int_{R-H}^R\pi(R^2-y^2)\mathrm{d}y=\pi\left[R^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{R-H}^R\\&=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).\end{aligned}$$

15. 求下列已知曲线所围成的图形，按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积.

(1) $y=x^2$ ， $x=y^2$ ，绕 y 轴;

(2) $y=\arcsin x$ ， $x=1$ ， $y=0$ ，绕 x 轴;

(3) $x^2+(y-5)^2=16$ ，绕 x 轴;

(4) 摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的一拱， $y=0$ ，绕直线 $y=2a$.

解 (1) 图形见图 6-19， $V=\int_0^1[\pi(\sqrt{y})^2-\pi(y^2)^2]\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(y-y^4)\,\mathrm{d}y=\pi\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1=\frac{3}{10}\pi$.

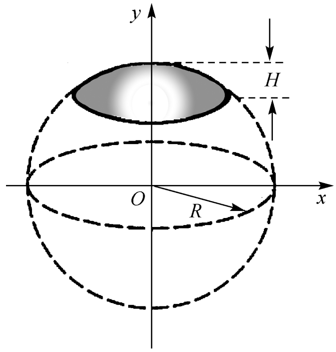


图 6-18

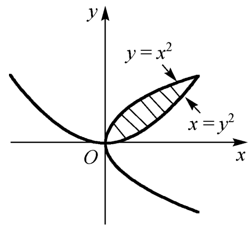


图 6-19

(2) 图形如图 6-20 所示,

$$V=\int_0^1 \pi(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left[x(\arcsin x)^2\right]_0^1-2\pi\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,\mathrm{d}x\,,$$

令 $\arcsin x=t$，则

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{t\sin t}{\cos t}\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}t\sin t\mathrm{d}t=-\left[t\cos t\right]_0^{\pi/2}+\left[\sin t\right]_0^{\pi/2}=1$$

所以 $V=\pi\left[x(\arcsin x)^2\right]_0^1-2\pi=\dfrac{\pi^3}{4}-2\pi$.

(3) 图形如图 6-21 所示，该立体是由曲线 $y=5+\sqrt{16-x^2}$, $x=-4$, $x=4$, $y=0$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得立体，减去由曲线 $y=5-\sqrt{16-x^2}$, $x=-4$, $x=4$, $y=0$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得立体得到的，因此体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_{-4}^4\pi(5+\sqrt{16-x^2})^2\mathrm{d}x-\int_{-4}^4\pi(5-\sqrt{16-x^2})^2\mathrm{d}x\\&=\int_{-4}^4 20\pi\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x\overset{x=4\sin t}{=}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}320\pi\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=640\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\mathrm{d}t=320\pi\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t\\&=320\pi\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2}=160\pi^2.\end{aligned}$$

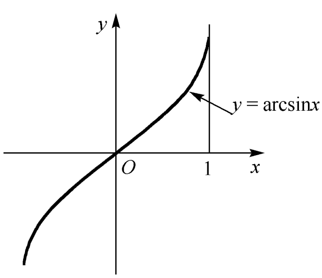


图 6-20

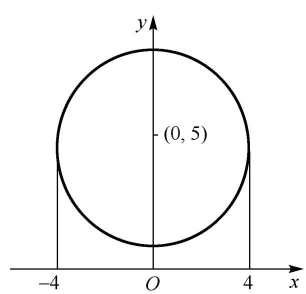


图 6-21

(4) 图形如图 6-22 所示，该立体可视为由曲线 $y=2a$, $y=0$, $x=0$, $x=2\pi a$ 所围成的图形绕 $y=2a$ 旋转所得的圆柱体，减去由摆线的一拱 $y=2a$, $x=0$, $x=2\pi a$ 绕 $y=2a$ 旋转所围成的

立体得到的，记摆线上的点为 (x,y)，则体积为

$$V=\pi(2a)^2(2\pi a)-\int_0^{2\pi a}\pi(2a-y)^2\mathrm{d}x,$$

由摆线的参数方程 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$，做换元得

$$\begin{aligned}V&=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi}\pi[2a-a(1-\cos t)]^2\mathrm{d}a(t-\sin t)\\&=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t-\cos^2 t-\cos^3 t)\mathrm{d}t\\&=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t-\pi a^3\int_0^{2\pi}\cos t\mathrm{d}t+\pi a^3\int_0^{2\pi}\cos^3 t\mathrm{d}t\\&=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t+\pi a^3\int_0^{2\pi}(\sin^2 t-1)\mathrm{d}\sin t\\&=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t=7\pi^2a^3.\end{aligned}$$

16. 求圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 绕 $x=-b(b>a>0)$ 旋转所成旋转体的体积.

解　图形如图 6-23 所示，记由曲线 $x=\sqrt{a^2-y^2}$, $x=-b$, $y=-a$, $y=a$ 围成的图形绕 $x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_1，由曲线 $x=-\sqrt{a^2-y^2}$, $x=-b$, $y=-a$, $y=a$ 围成的图形绕 $x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_2，则所求体积为

$$\begin{aligned}V=V_1-V_2&=\int_{-a}^{a}\pi(\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}\pi(-\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y\\&=\int_{-a}^{a}4\pi b\sqrt{a^2-y^2}\mathrm{d}y\overset{y=a\sin t}{=}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}4\pi a^2b\cos^2 t\mathrm{d}t=8\pi a^2b\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=4\pi a^2b\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=4\pi a^2b\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2}=2\pi^2a^2b.\end{aligned}$$

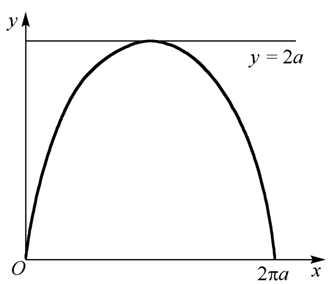


图 6-22

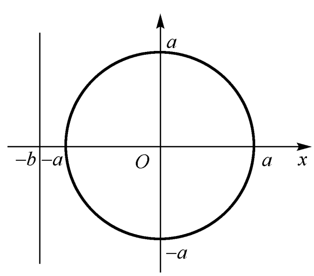


图 6-23

17. 设有一截椎体，其高为 h，上下底均为椭圆，椭圆的轴长分别为 $2a$、$2b$ 和 $2A$、$2B$，求该截椎体的体积.

解　用与下底相距 x 且平行于底面的平面去截该立体得到一个椭圆，记其半轴长分别为 u、v，则 $u=\dfrac{a-A}{h}x+A$，$v=\dfrac{b-B}{h}x+B$，该椭圆面积为 $\pi\left(\dfrac{a-A}{h}x+A\right)\left(\dfrac{b-B}{h}x+B\right)$，因此体积为

$$V=\int_0^h \pi\left(\frac{a-A}{h}x+A\right)\left(\frac{b-B}{h}x+B\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^h \pi\left(\frac{(a-A)(b-B)}{h^2}x^2+\frac{A(b-B)+B(a-A)}{h}x+AB\right)\mathrm{d}x$$
$$=\pi\left[\frac{(a-A)(b-B)}{h^2}\frac{x^3}{3}+\frac{B(a-A)+A(b-B)}{h}\frac{x^2}{2}+ABx\right]_0^h$$
$$=\frac{1}{6}\pi h[2(ab+AB)+aB+bA].$$

18. 计算底面是半径为 R 的圆, 而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体的体积（如图 6-24 所示）.

解 以 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[-R,R]$，相应截面等边三角形边长为 $2\sqrt{R^2-x^2}$，面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{R^2-x^2})^2=\sqrt{3}(R^2-x^2)$，因此由截面面积为已知的立体的体积计算公式知

$$V=\int_{-R}^{R}\sqrt{3}(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3.$$

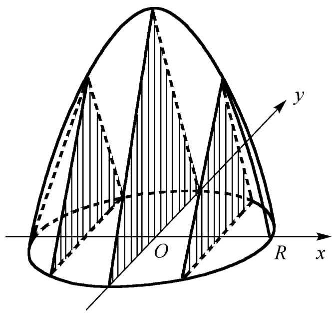


图 6-24

19. 证明：由平面图形 $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b$，$0\leqslant y\leqslant f(x)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

解 取横坐标 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[a,b]$，与区间 $[a,b]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 相应的窄条图形绕 y 轴旋转所成的旋转体近似于一圆柱壳, 柱壳的高为 $f(x)$，厚为 $\mathrm{d}x$，底面周长为 $2\pi x$，故其体积近似等于 $2\pi xf(x)\mathrm{d}x$，从而由元素法知 $V=\int_a^b 2\pi xf(x)\mathrm{d}x$.

20. 利用题 19 的结论, 计算曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解

$$V=2\pi\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x=-2\pi\int_0^\pi x\mathrm{d}\cos x=-2\pi\left[x\cos x\right]_0^\pi+2\pi\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}x=2\pi^2+2\pi\left[\sin x\right]_0^\pi=2\pi^2.$$

21. 设由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_1，由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_2，其中 $0<a<2$.

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1，D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

(2) 问当 a 为何值时, V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值.

解 (1) $V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$；

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4.$$

(2) 设 $V=V_1+V_2=\dfrac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$，由 $V'=4\pi a^3(1-a)=0$，解得区间 $(0,2)$ 内唯一驻点 $a=1$．当 $0<a<1$ 时 $V'>0$；当 $a>1$ 时 $V'<0$．因此 $a=1$ 是极大值点也是最大值点，此时 V_1+V_2 取得最大值 $\dfrac{129}{5}\pi$．

22. 计算曲线 $y=\ln x$ 上相应于 $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

解
$$S=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\overset{x=\sqrt{u^2-1}}{=}\int_2^3\frac{u^2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u=\int_2^3\left(1+\frac{1}{(u-1)(u+1)}\right)\mathrm{d}u=\int_2^3\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\right]\mathrm{d}u$$
$$=\left[u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

23. 计算半立方抛物线 $y^2=\dfrac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\dfrac{x}{3}$ 截得的一段弧（见图 6-25）的长度.

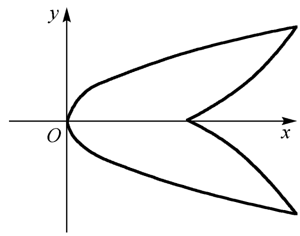


图 6-25

解 首先解方程组 $\begin{cases} y^2=\dfrac{2}{3}(x-1)^3 \\ y^2=\dfrac{x}{3} \end{cases}$，得到两条曲线的交点为 $(2,\sqrt{2/3})$ 和 $(2,-\sqrt{2/3})$，由于曲线关于 x 轴对称，因此所求弧长为第一象限部分的 2 倍，故所求弧的长度为
$$S=2\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=2\int_1^2\sqrt{1+\frac{3}{2}(x-1)}\,\mathrm{d}x=\sqrt{6}\int_1^2\sqrt{x-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\sqrt{6}\left[\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^{3/2}\right]_1^2=\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{3/2}-1\right].$$

24. 计算抛物线 $y^2=2px$ 从顶点到该曲线上的一点 $M(x,y)$ 的弧长.

解 不妨设 $p>0$，由于顶点到 (x,y) 的弧长与顶点到 $(x,-y)$ 的弧长相等，因此不妨设 $y>0$，故有
$$S=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{y}{p}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{p}\int_0^y\sqrt{p^2+y^2}\,\mathrm{d}y\overset{y=p\tan t}{=}p\int_0^{\arctan\frac{y}{p}}\sec^3t\,\mathrm{d}t$$

又
$$\int_0^{\arctan\frac{y}{p}}\sec^3t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\arctan\frac{y}{p}}\sec t\,\mathrm{d}\tan t=\left[\sec t\tan t\right]_0^{\arctan\frac{y}{p}}-\int_0^{\arctan\frac{y}{p}}\sec t\tan^2t\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{p^2}-\int_0^{\arctan\frac{y}{p}}\sec t(\sec^2t-1)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{p^2}-\int_0^{\arctan\frac{p}{y}}\sec^3t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\arctan\frac{p}{y}}\sec t\,\mathrm{d}t$$

所以$\int_0^{\arctan\frac{y}{p}}\sec^3 t\mathrm{d}t=\dfrac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p^2}+\dfrac{1}{2}\int_0^{\arctan\frac{p}{y}}\sec t\mathrm{d}t=\dfrac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p^2}+\dfrac{1}{2}\Big[\ln\left|\sec t+\tan t\right|\Big]_0^{\arctan\frac{y}{p}}$

$=\dfrac{1}{2p^2}y\sqrt{p^2+y^2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}$（角的三角函数代换参照图 6-26）

所以$S=\dfrac{1}{2p}y\sqrt{p^2+y^2}+\dfrac{1}{2}p\ln\dfrac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}$.

注：此定积分也可由积分表直接求得.

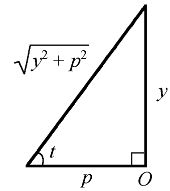


图 6-26

25. 计算星形线$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$的全长.

解 由对称性知星形线的全长为第一象限部分的 4 倍，所以

$$S=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=12a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\mathrm{d}t=6a.$$

26. 将绕在圆（半径为a）上的细线放开拉直，使细线与圆周始终相切（见图 6-27），细线端点画出的轨迹称为圆的渐伸线，其方程为$x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$．算出该曲线上相应于$0\leqslant t\leqslant\pi$的一段弧的长度.

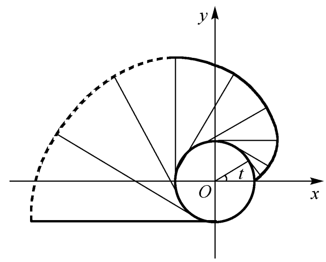


图 6-27

解 $S=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$

$=\int_0^{\pi}at\mathrm{d}t=\dfrac{a}{2}\pi^2$.

27. 在摆线$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$上求分摆线第一拱成$1:3$的点的坐标.

解 对应于摆线第一拱的参数t的变化范围为$[0,2\pi]$，参数t在范围$[0,t_0]$时摆线的长度为

$$s_0=\int_0^{t_0}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t=\int_0^{t_0}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{t_0}\sqrt{2a^2-2a^2\cos t}\mathrm{d}t=a\int_0^{t_0}2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right),$$

当$t_0=2\pi$时，代入上式知摆线第一拱的长度为$8a$，所以t_0应满足

$$4a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right)=\frac{8a}{4}$$

解得$t_0=\dfrac{2\pi}{3}$，所以所求点的坐标为$\left(\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\dfrac{3a}{2}\right)$.

28. 求对数螺线$\rho=\mathrm{e}^{a\theta}$相应于$0\leqslant\theta\leqslant\varphi$的一段弧长.

解 图像如图 6-12 所示，

$$S=\int_0^{\varphi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\varphi}\sqrt{\mathrm{e}^{2a\theta}+a^2\mathrm{e}^{2a\theta}}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\varphi}\sqrt{1+a^2}\mathrm{e}^{a\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$=\left[\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\mathrm{e}^{a\theta}\right]_0^{\varphi}=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(\mathrm{e}^{a\varphi}-1).$$

29. 求曲线 $\rho\theta=1$ 相应于 $\frac{3}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{4}{3}$ 的一段弧长.

解 $S=\int_{3/4}^{4/3}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\theta=\int_{3/4}^{4/3}\sqrt{\frac{1}{\theta^2}+\frac{1}{\theta^4}}\mathrm{d}\theta=\int_{3/4}^{4/3}\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta^2}\mathrm{d}\theta=-\int_{3/4}^{4/3}\sqrt{1+\theta^2}\mathrm{d}(1/\theta)$

$$=-\left[\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta}\right]_{3/4}^{4/3}+\int_{3/4}^{4/3}\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\mathrm{d}\theta=\frac{5}{12}+\left[\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]_{3/4}^{4/3}=\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}.$$

注：此处用到公式 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$.

30. 求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 的全长.

解 $S=\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta$$
$$=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta-2a\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$
$$=4a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}-4a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}=8a.$$

习题 6-2 定积分在物理学上的应用

1. 由实验知道，弹簧在拉伸过程中，需要的力 F（单位为 N）与伸长量 s（单位为 cm）成正比，即

$$F=ks\quad（k\text{ 是比例常数}）.$$

如果把弹簧由原长拉伸 6cm，计算所作的功.

解 取伸长量 s 为积分变量，则 s 的变化范围为 $[0,6]$，取小区间 $[s,s+\mathrm{d}s]$，当弹簧处于小区间 $[s,s+\mathrm{d}s]$ 时需要的力为 $F=ks$，力所作的功为 $\mathrm{d}W=F\mathrm{d}s=ks\mathrm{d}s$. 所以把弹簧由原长拉伸 6cm 所作的功为

$$W=\int_0^6 ks\mathrm{d}s=18k\ (\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}).$$

2. 直径为 20cm、高为 80cm 的圆筒内充满压强为 10N/cm^2 的蒸汽. 设温度保持不变，要使蒸汽体积缩小一半，问需要作多少功?

解 由条件 $pV=k$，k 为常数，知 $k=10\cdot100^2\cdot\pi\cdot0.1^2\cdot0.8=800\pi$. 设圆筒内高度减少 h m 时蒸汽的压强为 $p(h)(\mathrm{N}/\mathrm{m}^2)$，则 $p(h)=\frac{k}{V}=\frac{800\pi}{(0.8-h)s}$，压力为 $p=p(h)s=\frac{800\pi}{0.8-h}$.

取 h 为积分变量，则 h 的变化范围为 $[0,0.4]$，因此所作的功为

$$W=\int_0^{0.4}\frac{800\pi}{0.8-h}\mathrm{d}h=800\pi\big[-\ln(0.8-h)\big]_0^{0.4}=800\pi\ln 2\approx 1742(\mathrm{J}).$$

3. (1) 证明: 把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所作的功是 $W=\dfrac{mgRh}{R+h}$, 其中 g 是重力加速度, R 是地球的半径;

(2) 一颗人造地球卫星的质量为 173kg, 在高于地面 630km 处进入轨道. 问把这颗卫星从地面送到 630km 的高空处, 克服地球引力要作多少功? 已知 $g=9.8\mathrm{m/s}^2$, 地球半径 $R=6370\mathrm{km}$.

解　(1) 质量为 m 的物体与地心相距 x 时, 引力为 $F=k\dfrac{mM}{x^2}$, 根据条件 $mg=k\dfrac{mM}{R^2}$, 有 $k=\dfrac{R^2g}{M}$, 所以引力为 $F=\dfrac{mgR^2}{x^2}$, 从而所作的功为

$$W=\int_R^{R+h}\frac{mgR^2}{x^2}\mathrm{d}x=mgR^2\left[-\frac{1}{x}\right]_R^{R+h}=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\frac{mgRh}{R+h}.$$

(2) 由(1)知所作的功为 $W=\dfrac{mgRh}{R+h}=\dfrac{173\times 9.8\times 6370\times 630}{6370+630}=971973\approx 9.72\times 10^5(\mathrm{kJ})$.

4. 一物体按规律 $x=ct^3$ 作直线运动, 介质的阻力与速度的平方成正比. 计算物体由 $x=0$ 移到 $x=a$ 时, 克服介质阻力所作的功.

解　取 t 为积分变量, 当 $x=a$ 时 $a=ct^3$, 此时 $t=(a/c)^{1/3}$, 所以 t 的变化范围为 $\left[0,(a/c)^{1/3}\right]$. 速度为 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3ct^2$, 阻力为 $R=kv^2=9kc^2t^4$, 其中 k 为常数. 由此得到

$$\mathrm{d}W=R\mathrm{d}x=27kc^3t^6\mathrm{d}t.$$

故 $W=\displaystyle\int_0^{(a/c)^{\frac{1}{3}}}27kc^3t^6\mathrm{d}t=\frac{27kc^3}{7}\left[t^7\right]_0^{(a/c)^{\frac{1}{3}}}=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}$.

5. 用铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比, 在击第一次时, 将铁钉击入木板 1cm. 如果铁锤每次打击铁钉所作的功相等, 问锤击第二次时, 铁钉又击入多少?

解　设木板对铁钉的阻力为 f, 木板阻力系数为 k, 则由条件得 $f(x)=kx$. 铁锤击第一次时所作的功为

$$W_1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}.$$

设锤击第二次时, 铁钉又击入 $h_0\mathrm{cm}$, 则锤击第二次所作的功为

$$W_2=\int_1^{1+h_0}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{1+h_0}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}[(1+h_0)^2-1],$$

由题意知 $W_1=W_2$, 得 $h_0=\sqrt{2}-1$.

6. 设一圆锥形储水池, 深 15m, 口径 20m, 盛满水, 今以泵将水吸尽, 问要作多少功?

解　我们设想水是一层一层地被抽出来的. 以高度 h 为积分变量, 则 h 的变化范围为 $[0,15]$,

对该区间内任一小区间$[h,h+\mathrm{d}h]$，相应于该小区间的这层薄水的体积为

$$\mathrm{d}V=\pi\left(\frac{10}{15}h\right)^2\mathrm{d}h=\frac{4}{9}\pi h^2\mathrm{d}h,$$

该小区间的这层薄水移动的位移为$15-h$，记ρ为水的密度，则所作的功元素为

$$\mathrm{d}W=mg(15-h)=\rho dVg(15-h)=\frac{4}{9}\pi\rho gh^2(15-h)\mathrm{d}h$$

则将水吸尽所作的功为

$$W=\int_0^{15}\frac{4}{9}\pi\rho gh^2(15-h)\mathrm{d}h=1875\pi\rho g\approx5.76975\times10^7(\mathrm{J}).$$

7. 有一闸门，其形状和尺寸如图 6-28 所示，水面超过门顶 2 m. 求闸门上所受的水压力.

解　设水深x米的地方压强为$p(x)$，则$p(x)=1000gx$，取x为积分变量，则x的变化范围为$[2,5]$，对该区间内任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，闸门的面积为$\mathrm{d}S=2\mathrm{d}x$，压力为

$$\mathrm{d}F=p(x)\mathrm{d}S=2p(x)\mathrm{d}x=2000gx\mathrm{d}x,$$

因此闸门上所受的水压力为

$$F=\int_2^5 2000gx\mathrm{d}x=1000g[x^2]_2^5=21000g(\mathrm{N})\approx205.8(\mathrm{kN}).$$

8. 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体，尺寸如图 6-29 所示. 当水箱装满水时，计算水箱的一个端面所受的压力.

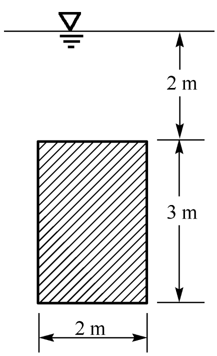


图 6-28

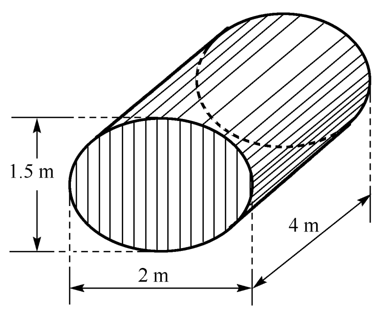


图 6-29

解　以侧面的椭圆长轴为x轴，短轴为y轴建立坐标系，则该椭圆的方程为$x^2+\dfrac{y^2}{0.75^2}=1$，取$y$为积分变量，则$y$的变化范围为$[-0.75,0.75]$，对该区间内任一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$，该小区间相应的水深为$0.75-y$，相应的压强为$1000g(0.75-y)$，相应的面积为

$$\mathrm{d}S=2\sqrt{1-\frac{y^2}{0.75^2}}\mathrm{d}y,$$

则该小区间相应的压力为

$$\mathrm{d}F=1000g(0.75-y)\mathrm{d}S=2000g(0.75-y)\sqrt{1-\frac{y^2}{0.75^2}}\mathrm{d}y,$$

因此水箱的一个端面所受的压力为

$$F=\int_{-0.75}^{0.75}2000g(0.75-y)\sqrt{1-\frac{y^2}{0.75^2}}\mathrm{d}y$$
$$=2000g\int_{-0.75}^{0.75}\sqrt{0.75^2-y^2}\mathrm{d}y-\frac{2000g}{0.75}\int_{-0.75}^{0.75}y\sqrt{0.75^2-y^2}\mathrm{d}y$$
$$\approx 17318(\mathrm{N})\approx 17.3(\mathrm{kN}).$$

9. 有一等腰梯形闸门, 其两条底边各长 10m 和 6m, 高为 20m. 较长的底边与水面相齐. 计算闸门的一侧所受的水压力.

解 如图 6-30 所示建立坐标系, 则 A 点坐标为 $(5,0)$, B 点坐标为 $(3,-20)$, 所以过 A、B 两点的直线方程为 $y=10x-50$. 取 y 为积分变量, 则 y 的变化范围为 $[-20,0]$, 对应小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的闸门的宽度近似为 $2x=10+\frac{y}{5}$, 面积近似值为 $2x\mathrm{d}y=\left(\frac{y}{5}+10\right)\mathrm{d}y$, 各点处所受到的水的压强近似等于 $\rho g(-y)(\mathrm{kN/m^2})$, ρ 表示水的密度, 因此对应小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的闸门的一侧水压力近似为

$$\mathrm{d}F=P\cdot S=\rho g(-y)\left(10+\frac{y}{5}\right)\mathrm{d}y$$

其中 P 表示压强, S 表示面积. 因此, 闸门的一侧所受的水压力为

$$P=\int_{-20}^{0}\rho g(-y)\left(\frac{y}{5}+10\right)\mathrm{d}y=1.4373\times 10^7(\mathrm{N})=14373(\mathrm{kN}) .$$

10. 一底为 8cm、高为 6cm 的等腰三角形片, 铅直地沉没在水中, 顶在上, 底在下且与水面平行, 而顶离水面 3cm, 试求它每面所受的压力.

解 如图 6-31 所示建立坐标系, 取三角形顶点为原点, 取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[0,0.06]$, 易知 B 点的坐标为 $(0.06,0.04)$, 因此 OB 的方程为 $y=\frac{2}{3}x$, 故对应小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的面积近似值为

$$\mathrm{d}S=2\cdot\frac{2}{3}x\cdot\mathrm{d}x=\frac{4}{3}x\mathrm{d}x .$$

记 ρ 为水的密度, 则在 x 处的水压强为

$$p=\rho g(x+0.03)=1000g(x+0.03) ,$$

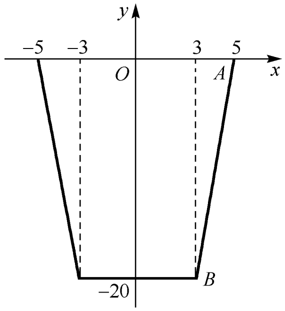


图 6-30

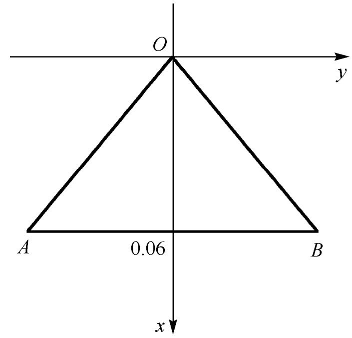


图 6-31

因此对应小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上所受的压力为

$$\mathrm{d}F=1000g(x+0.3)\cdot\frac{4}{3}x\mathrm{d}x$$

故每面所受的压力为

$$F=\int_0^{0.06}1000g(x+0.03)\cdot\frac{4}{3}x\mathrm{d}x=0.168g\approx1.65(\mathrm{N}).$$

11. 设有一长度为l、线密度为μ的均匀细直棒, 在与棒的一端垂直距离为a单位处有一质量为m的质点M，试求该细棒对质点M的引力.

解 如图 6-32 所示建立坐标系, 取y为积分变量, 则y的变化范围为$[0,l]$, 对应小区间为$[y,y+\mathrm{d}y]$，将这一小段近似看成质点，小段的质量为$\mu\mathrm{d}y$，小段与质点的距离为$r=\sqrt{a^2+y^2}$，小段与质点M的引力的大小的近似值为

$$\mathrm{d}F=G\frac{m\mu\mathrm{d}y}{r^2},$$

把该力分解, 得到x轴、y轴方向的分量分别为

$$\mathrm{d}F_x=-\frac{a}{r}\mathrm{d}F=-G\frac{am\mu}{(a^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}F_y=\frac{y}{r}\mathrm{d}F=G\frac{a\mu y}{(a^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}y,$$

因此,

$$F_x=\int_0^l-G\frac{am\mu}{(a^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}y\overset{y=a\tan t}{=}-G\frac{m\mu}{a}\int_0^{\arctan\frac{l}{a}}\cos t\mathrm{d}t=-\frac{Gm\mu l}{a\sqrt{a^2+l^2}},$$

$$F_y=\int_0^lG\frac{m\mu y}{(a^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}y=\left[-G\frac{m\mu}{(a^2+x^2)^{1/2}}\right]_0^l=m\mu G\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right).$$

12. 设有一半径为R、中心角为φ的圆弧形细棒, 其线密度为常数μ. 在圆心处有一质量为m的质点M，试求该细棒对质点M的引力.

解 如图 6-33 所示建立坐标系, 则θ的变化范围为$[-\varphi/2,\varphi/2]$, 则相应小区间$[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$的弧长为$R\mathrm{d}\theta$, 对质点的引力为$\mathrm{d}F=G\dfrac{m\mu R\mathrm{d}\theta}{R^2}$.

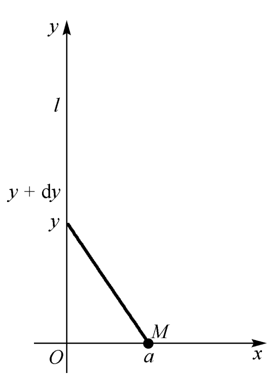


图 6-32

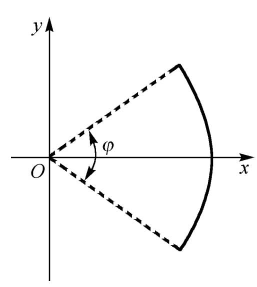


图 6-33

根据对称性可知所求的铅直方向引力分量为零, 水平方向的引力分量为

$$\mathrm{d}F_x=\mathrm{d}F\cos\theta=G\frac{m\mu R\cos\theta\mathrm{d}\theta}{R^2}$$

所以 $F_x=\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\frac{Gm\mu R\cos\theta\mathrm{d}\theta}{R^2}=\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$. 故所求引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$, 方向为 M 指向圆弧的中心.

总习题六

1. 填空.

(1) 曲线 $y=x^3-5x^2+6x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$____________.

(2) 曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1\leqslant x\leqslant 3$ 的一段弧的长度 $s=$____________.

解 (1) 令 $x^3-5x^2+6x=0$ 解得 $x=0,2,3$. 由穿根法知 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时 $y\geqslant 0$; $2\leqslant x\leqslant 3$ 时 $y\leqslant 0$. 故

$$A=\int_0^2(x^3-5x^2+6x)\,\mathrm{d}x-\int_2^3(x^3-5x^2+6x)\mathrm{d}x=\frac{37}{12}.$$

(2) $s=\int_1^3\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$.

2. 以下两题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论.

(1) 设 x 轴上有一长度为 l 、线密度为常数 u 的细棒, 在细棒右端的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 M, 已知万有引力常量为 G, 则质点 M 和细棒之间的引力的大小为(　　).

A. $\int_{-l}^{0}\frac{Gmu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^l\frac{Gmu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$　　C. $\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\frac{Gmu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$　　D. $2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{Gmu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$

(2) 设在区间 $[a,b]$ 上, $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)<0$.

令 $A_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $A_2=f(a)(b-a)$, $A_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$, 则有(　　).

A. $A_1<A_2<A_3$　　B. $A_2<A_1<A_3$　　C. $A_3<A_1<A_2$　　D. $A_2<A_3<A_1$

解 (1) 选 A.

(2) 因为 $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加. 又因 $f''(x)<0$, 所以曲线在 $[a,b]$ 上向上凸, A_1 表示由 $x=a,x=b,y=f(x),x$ 轴围成的曲边梯形面积, A_2 表示 $x=a,x=b,y=f(a),x$ 轴围成的矩形面积, A_3 表示梯形面积, 所以选 D.

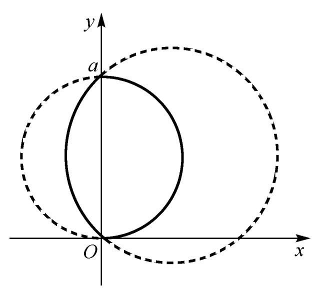


图 6-34

3. 一金属棒长 3m, 离棒左端 x 米处的线密度 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}(\mathrm{kg/m})$. 问 x 为何值时, $[0,x]$ 一段的质量为全棒质量的一半.

解 $[0,x]$ 一段的质量为

$$m(x)=\int_0^x \rho(x)\mathrm{d}x=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=2\left[\sqrt{1+x}\right]_0^x=2(\sqrt{1+x}-1),$$

总质量为 $m(3)=2$，要满足 $m(x)=\frac{1}{2}m(3)=1$，即 $2(\sqrt{1+x}-1)=1$，求得 $x=\frac{5}{4}$ (m).

4. 求由曲线 $\rho=a\sin\theta$ 及 $\rho=a(\cos\theta+\sin\theta)$ ($a>0$)所围图形公共部分的面积.

解 解方程组 $\begin{cases}\rho=a\sin\theta\\ \rho=a(\cos\theta+\sin\theta)\end{cases}$，解得两曲线交点坐标为 $(a,\frac{\pi}{2})$，注意到当 $\theta=0$ 时 $\rho=a\sin\theta=0$，当 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ 时 $\rho=a(\cos\theta+\sin\theta)=0$，故两曲线分别过(0, 0)和 $(0,\frac{3}{4}\pi)$，即都过极点（见图 6-34），因此所求面积为

$$A=\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\frac{1}{2}[a(\cos\theta+\sin\theta)]^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\pi(a/2)^2$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/4}(1+\sin 2\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{\pi a^2}{8}=\frac{a^2}{2}\left[\theta-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{\pi/2}^{3\pi/4}=\frac{a^2}{4}(\pi-1).$$

5. 从下到上依次有三条曲线: $y=x^2$， $y=2x^2$ 和 C，假设对曲线 $y=2x^2$ 上的任一点 P 所对应的面积 A 和 B 恒相等（图见课本），求曲线 C 的方程.

解 设曲线 C 的方程为 $x=f(y)$， P 点坐标为 $(\sqrt{y/2},y)$，所以面积 A 和 B 分别为

$$A=\int_0^y\left[\sqrt{y/2}-f(y)\right]\mathrm{d}y,\quad B=\int_0^{\sqrt{y/2}}(2x^2-x^2)\,\mathrm{d}x,$$

由题意知对任意 $y\geqslant 0$ 都有

$$\int_0^y[\sqrt{y/2}-f(y)]\,\mathrm{d}y=\int_0^{\sqrt{y/2}}(2x^2-x^2)\mathrm{d}x,$$

上式对 y 求导得

$$\sqrt{y/2}-f(y)=\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2y}},$$

所以 $f(y)=\frac{3\sqrt{2y}}{8}$，即曲线 C 为 $x=\frac{3\sqrt{2y}}{8}$ $(y\geqslant 0)$.

6. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$，且当 $x\in[0,1]$ 时， $y\geqslant 0$，试确定 a , b , c 的值，使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1$, $y=0$ 所围图形的面积为 4/9，且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

解 由抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$，可得 $c=0$. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1$, $y=0$ 所围图形的面积为

$$S=\int_0^1(ax^2+bx)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2},$$

从而得到 $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{9}$，即 $a=\frac{4}{3}-\frac{3}{2}b$. 该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\int_0^1 \pi(ax^2+bx)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3}\right)=\frac{\pi}{30}(b-2)^2+\frac{2}{9}\pi,$$

因此当 $b=2$ 时体积为最小，再由 $a=\frac{4}{3}-\frac{3}{2}b$ 知 $a=-\frac{5}{3}$，故抛物线为 $y=-\frac{5}{3}x^2+2x=\frac{x}{3}(6-5x)$．而且在区间 $[0,1]$ 上，此抛物线满足 $y\geqslant 0$，故当 $a=-\frac{5}{3}$, $b=2$, $c=0$ 符合题目要求.

7. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D．

(1) 求 D 的面积 A；(2) 求 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V．

解　(1) 设切点的横坐标为 x_0，则曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

把原点 $(0,0)$ 代入上面的方程知 $y=\ln x_0-1=0$，从而 $x_0=\mathrm{e}$，所以该切线的方程是

$$y=\frac{1}{\mathrm{e}}x.$$

平面图形 D 的面积 $A=\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}-1$.

(2) 切线 $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$ 与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成的三角形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的圆锥体的体积为 $V_1=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2$．曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成的图形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的旋转体的体积为

$$V_2=\int_0^1\pi(\mathrm{e}-\mathrm{e}^y)^2\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}(-\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}-1),$$

因此所求旋转体的体积为 $V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}(5\mathrm{e}^2-12\mathrm{e}+3)$．

8. 求由曲线 $y=x^{3/2}$，直线 $x=4$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

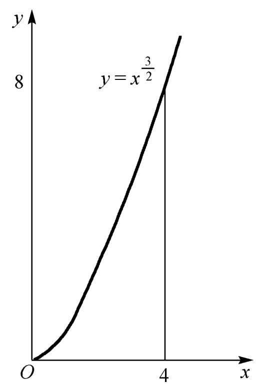


图 6-35

解　如图 6-35 所示，取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[0,4]$，所求体积可视为长为 4、宽为 8 的矩形绕 y 轴旋转所得圆柱体的体积，减去由 $y=x^{3/2}$, $x=0$, $y=8$ 所围图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积，因此体积为

$$V=\pi\cdot 4^2\cdot 8--\int_0^8\pi y^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}y=128\pi-\left[\frac{3}{7}\pi y^{\frac{7}{3}}\right]_0^8=\frac{512}{7}\pi.$$

9. 求圆盘 $(x-2)^2+y^2\leqslant 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解　所求的旋转体可以视为由 $y=-1$, $y=1$, $x=0$, $x=2+\sqrt{1-y^2}$ 所围图形绕 y 轴旋转所得的立体，减去由 $y=-1$, $y=1$, $x=0$, $x=2-\sqrt{1-y^2}$ 所围图形绕 y 轴旋转所得的立体，因此

$$V=\int_{-1}^{1}\pi(2+\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}\pi(2-\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y$$
$$\overset{y=\sin t}{=}8\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\mathrm{d}t=4\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=4\pi^2.$$

10. 求抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2+y^2=3$ 所截下的有限部分的弧长.

解 如图 6-36 所示，解方程组 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$，得到两曲线的交点为 $(-\sqrt{2},1)$，$(\sqrt{2},1)$，由对称性知在第一象限的部分的 2 倍为所求弧长，因此所求弧长为

$$S=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x\ \underline{\underline{x=\tan t}}\ 2\int_0^{\arctan\sqrt{2}}\sec^3 t\mathrm{d}t$$

根据公式 $\int\sec^3 x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$，有

$$S=2\int_0^{\arctan\sqrt{2}}\sec^3 t\mathrm{d}t=\left[\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|\right]_0^{\arctan\sqrt{2}}$$

又因为当 $x=\arctan\sqrt{2}$ 即 $\tan x=\sqrt{2}$，此时 $\sec x=\sqrt{3}$，所以 $S=\sqrt{6}+\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

11. 半径为 r 的球沉入水中，球的上部与水面相切，球的密度与水相同，现将球从水中取出，需作多少功？

解 取 x 轴的正向铅直向上，沉入水中的球心为原点，并取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[-r,r]$，对应于小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的球的薄片的体积为

$$\mathrm{d}V=\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2\mathrm{d}x=\pi(r^2-x^2)\mathrm{d}x,$$

由于该部分在水面以下重力与浮力的合力为零（因为球的密度 ρ 与水的密度相同），所以在水面上方的位移中才作功，在水面以上移动距离为 $r+x$，故作功元素为

$$\mathrm{d}W=mg(r+x)=\rho\mathrm{d}Vg(r+x)=g\pi(r^2-x^2)(r+x)\mathrm{d}x$$

所以将球从水中取出需作的功为

$$W=\int_{-r}^{r}g\pi(r^2-x^2)(r+x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-r}^{r}g\pi r(r^2-x^2)\mathrm{d}x+\int_{-r}^{r}g\pi x(r^2-x^2)\mathrm{d}x$$
$$=2\pi gr\int_0^{r}(r^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi gr^4.$$

12. 边长为 a 和 b 的矩形薄板，与液面成 α 角斜沉于液体内，长边平行于液面而位于深 h 处，设 $a>b$，液体的密度为 ρ，试求薄板每面所受的压力.

解 如图 6-37 所示，记 x 为薄板上点到进水面的长边的距离，取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[0,b]$，对应小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上各点处受到水的压强为 $\rho g(h+x\sin\alpha)$，面积为 $a\mathrm{d}x$，

因此压力元素为

$$dF=\rho g(h+x\sin\alpha)a\mathrm{d}x\ .$$

因此, 薄板每面所受的压力为

$$F=\int_0^b\rho g(h+x\sin\alpha)\,a\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\rho gab(2h+b\sin\alpha)\ .$$

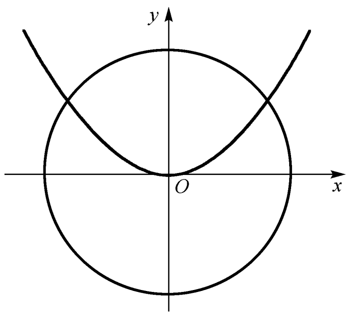


图 6-36

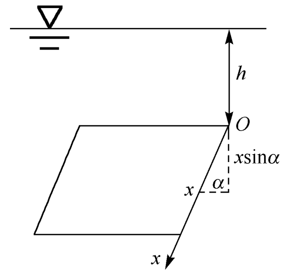


图 6-37

13. 设星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方, 在原点 O 处有一单位质点, 求星形线的第一象限的弧段对该质点的引力.

解 取参数 t 为积分变量, 则 t 的变化范围为 $[0,\pi/2]$, 对应区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 的弧长为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\mathrm{d}t=3a\cos t\sin t\mathrm{d}t\ ,$$

星形线的线密度为 $(\sqrt{x^2+y^2})^3=(\sqrt{a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t})^3$,

所以该弧段的质量为 $(a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s=3a^4\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t$,

该弧段与质点的引力大小为

$$G\frac{3a^4\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t}{a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t}=3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\ ,$$

因此曲线弧对该质点引力的水平方向分量、铅直方向分量分别为

$$F_x=\int_0^{\pi/2}\frac{a\cos^3 t}{\sqrt{a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t}}3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi/2}3Ga^2\cos^4 t\sin t\mathrm{d}t\ =3Ga^2\left[-\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{5}Ga^2\ ,$$

$$F_y=\int_0^{\pi/2}\frac{a\sin^3 t}{\sqrt{a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t}}3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}3Ga^2\cos t\sin^4 t\mathrm{d}t$$

$$=3Ga^2\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2}=\frac{3}{5}Ga^2$$

因此所求引力 $F=\left(\frac{3}{5}Ga^2,\frac{3}{5}Ga^2\right)$，即大小为 $\frac{3\sqrt{2}}{5}Ga^2$，方向角为 $\frac{\pi}{4}$.

14. 某建筑工地打地基时，需用气锤将桩打进土层. 气锤每次打击，都要克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数为 $k, k>0$）. 气锤第一次击打将桩打进地下 a 米. 根据设计方案，要求气锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0<r<1)$. 问:

(1) 气锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深?

(2) 若击打次数不限，则气锤至多能将桩打进地下多深?

解 (1) 设第 n 次击打后桩被打进地下 x_n 米，第 n 次击打时气锤克服阻力所作的功为 W_n $(n\in N^*)$. 由题设知当桩被打进地下的深度为 x 时，土层对桩的阻力的大小为 kx，所以 $W_1=\int_0^{x_1}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}{x_1}^2=\frac{k}{2}a^2$，$W_2=\int_{x_1}^{x_2}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}({x_2}^2-{x_1}^2)=\frac{k}{2}({x_2}^2-a^2)$.

由 $W_2=rW_1$ 可得 ${x_2}^2-a^2=ra^2$，即 ${x_2}^2=(1+r)a^2$.

$$W_3=\int_{x_2}^{x_3}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}({x_3}^2-{x_2}^2)=\frac{k}{2}[{x_3}^2-(1+r)a^2],$$

由 $W_3=rW_2=r^2W_1$ 可得 ${x_3}^2-(1+r)a^2=r^2a^2$，所以 $x_3=\sqrt{1+r+r^2}a$，即气锤击打桩 3 次后可将桩打进地下 $\sqrt{1+r+r^2}a$ 米.

(2) $W_n=\int_{x_{n-1}}^{x_n}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_n^2-x_{n-1}^2)$.

由 $W_n=rW_{n-1}$ 可得 $x_n^2-x_{n-1}^2=r(x_{n-1}^2-x_{n-2}^2)$，由(1)知 $x_2^2-x_1^2=ra^2$，所以 $x_n^2-x_{n-1}^2=r^{n-1}a^2$，从而由归纳法可得

$$x_n=\sqrt{1+r+\cdots+r^{n-1}}a,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}a\sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}}=\frac{a}{\sqrt{1-r}}$，即若击打次数不限，气锤至多能将桩打进地下 $\frac{a}{\sqrt{1-r}}$ 米.

第 7 章

微分方程

一、基 本 内 容

1. 微分方程的基本概念

   (1) 微分方程的定义;

   (2) 微分方程的阶;

   (3) 微分方程的解;

   (4) 微分方程的通解和特解;

   (5) 初始条件;

   (6) 初值问题;

   (7) 积分曲线.

2. 可分离变量的微分方程

   (1) 定义;

   (2) 分离变量法.

3. 齐次方程

   (1) 定义;

   (2) 齐次方程通解的求解方法.

*4. 可化为齐次的方程的求解方法

5. 一阶线性微分方程

   (1) 定义;

   (2) 常数变易法.

*6. 伯努利方程及其解法

7. 高阶微分方程

   (1) 定义;

   (2) 可降阶的高阶微分方程的求解方法;

   (3) 线性微分方程的解的结构;

   *(4) 求解高阶线性方程的常数变易法;

   (5) 常系数齐次线性微分方程的解法;

   (6) 常系数非齐次线性微分方程的解法;

   (7) 变系数的线性微分方程;

   (8) 常系数线性微分方程组的解法.

二、基 本 要 求

1. 理解微分方程、微分方程的阶、微分方程的解、微分方程的通解、微分方程的特解、初始条件、微分方程的积分曲线的概念.
2. 理解可分离变量的微分方程、隐式解、隐式通解的概念, 熟练掌握可分离变量的微分方程的求解方法.
3. 理解齐次方程的概念, 熟练掌握齐次方程和可化为齐次的方程的求解方法.
4. 理解一阶线性微分方程、齐次的和非齐次的线性微分方程的概念. 熟练掌握非齐次的线性微分方程的求解方法, 即常数变易法. *理解伯努利方程的概念, 熟练掌握伯努利方程的求解方法.
5. 理解高阶微分方程的概念, 熟练掌握三种容易降阶的高阶微分方程 $y^{(n)}=f(x)$ 型, $y''=f(x,y')$ 型和 $y''=f(y,y')$ 型的求解方法.
6. 理解二阶线性微分方程、齐次的和非齐次的二阶线性微分方程的概念, 熟练掌握以二阶齐次线性微分方程为例的线性微分方程的解的结构, 并掌握这种结构在 n 阶齐次线性微分方程的推广. 熟练掌握二阶非齐次线性微分方程通解的结构和叠加原理, 并掌握这两种性质在 n 阶非齐次线性微分方程的推广. *掌握适用于解高阶线性微分方程的常数变易法.
7. 理解二阶变系数齐次线性微分方程、二阶常系数齐次线性微分方程及其特征方程的概念. 熟练掌握求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的步骤. 了解 n 阶常系数齐次线性微分方程的一般形式及其对应的特征方程的概念, 熟练掌握求 n 阶常系数齐次线性微分方程的通解的步骤.
8. 理解二阶常系数非齐次线性微分方程的概念, 熟练掌握求非齐次项 $f(x)$ 为 $f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型和 $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l^{(1)}(x)\cos\omega x+P_n^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$ 型的两类二阶常系数非齐次线性微分方程的特解的方法, 即待定系数法.

*9. 理解欧拉方程的概念, 掌握欧拉方程的求解方法.

*10. 理解微分方程组和常系数线性微分方程组的概念, 掌握求解常系数线性微分方程组的求解步骤.

三、习 题 解 答

习题 7-1

1. 试说出下列各微分方程的阶数.

(1) $x(y')^2-2yy'+x=0$;　　(2) $x^2y''-xy'+y=0$;

(3) $xy'''+2y''+x^2y=0$;　　(4) $(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$;

(5) $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{C}=0$;　　(6) $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}+\rho=\sin^2\theta$.

解 (1) 一阶; (2) 二阶; (3) 三阶; (4) 一阶; (5) 二阶; (6) 一阶.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解.

(1) $xy'=2y, y=5x^2$;　　(2) $y''+y=0, y=3\sin x-4\cos x$;

(3) $y''-2y'+y=0, y=x^2\mathrm{e}^x$;　　(4) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0, y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$.

解 (1) 由 $y=5x^2$, 得 $y'=10x, xy'=10x^2=2y$, 所以 $y=5x^2$ 是所给微分方程的解.

(2) 由 $y=3\sin x-4\cos x$，得 $y'=3\cos x+4\sin x$，$y''=-3\sin x+4\cos x$，所以

$$y''+y=(-3\sin x+4\cos x)+(3\sin x-4\cos x)=0,$$

故 $y=3\sin x-4\cos x$ 是所给微分方程的解.

(3) 由 $y=x^2\mathrm{e}^x$，得 $y'=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x=(2x+x^2)\mathrm{e}^x$，$y''=(2+4x+x^2)\mathrm{e}^x$，所以

$$y''-2y'+y=(2+4x+x^2-4x-2x^2+x^2)\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x\neq 0,$$

所以 $y=x^2\mathrm{e}^x$ 不是所给微分方程的解.

(4) 因 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$，故 $y'=\lambda_1 C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+\lambda_2 C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$，$y''=\lambda_1^2 C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+\lambda_2^2 C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$，于是有

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=\lambda_1^2 C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+\lambda_2^2 C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}-\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}-\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$
$$+\lambda_1\lambda_2 C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+\lambda_1\lambda_2 C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}=0,$$

所以 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ 是所给微分方程的解.

3. 在下列各题中，验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解.

(1) $(x-2y)y'=2x-y$，$x^2-xy+y^2=C$；

(2) $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$，$y=\ln(xy)$.

解 (1) 方程 $x^2-xy+y^2=C$ 的两边同时对 x 求导，得 $2x-y-xy'+2yy'=0$，即 $(x-2y)y'=2x-y$，所以所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解.

(2) 方程 $y=\ln(xy)$ 的两边同时对 x 求导，得 $y'=\dfrac{y+xy'}{xy}$，即

$$(xy-x)y'-y=0,$$

再在上式的两边对 x 求导，得 $(y+xy'-1)y'+(xy-x)y''-y'=0$，即

$$(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0,$$

所以所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解.

4. 在下列各题中，确定函数关系式中所含的参数，使函数满足所给的初始条件.

(1) $x^2-y^2=C$，$y\big|_{x=0}=5$； (2) $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$，$y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=1$；

(3) $y=C_1\sin(x-C_2)$，$y\big|_{x=\pi}=1$，$y'\big|_{x=\pi}=0$.

解 (1) 根据初始条件，将 $x=0,y=5$ 代入函数关系式中，得 $C=-25$.

(2) 将 $x=0,y=0$ 代入 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$，得 $C_1=0$. 由 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$，得

$$y'=C_2\mathrm{e}^{2x}+2(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}.$$

将 $C_1=0$, $x=0, y'=1$ 代入上式得 $C_2=1$.

(3) 对 $y=C_1\sin(x-C_2)$ 求导，得 $y'=C_1\cos(x-C_2)$，将 $x=\pi, y=1$，$y'=0$ 代入上述两式，得

$$\begin{cases} C_1\sin C_2=1 & \text{(a)} \\ -C_1\cos C_2=0 & \text{(b)} \end{cases},$$

$(\mathrm{a})^2+(\mathrm{b})^2$ 得，$C_1^2=1$，不妨取 $C_1=1$，由 (a) 式得 $C_2=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$.

注：取 $C_1=-1$，可得到相同的结果.

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程.

(1) 曲线在点 (x,y) 处的切线的斜率等于该点横坐标的平方;

(2) 曲线上点 $P(x,y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 y 轴平分.

解 (1) 设所求曲线方程为 $y=f(x)$，它在点 (x,y) 处的切线的斜率为 y'，所以根据条件有 $y'=x^2$，此为曲线方程所满足的微分方程.

(2) 设所求曲线方程为 $y=f(x)$，它在点 $P(x,y)$ 处的切线的斜率为 y'，所以在该点处的法线斜率为 $-\dfrac{1}{y'}$. 因为线段 PQ 被 y 轴平分，所以可设 Q 的坐标为 $(-x,0)$，从而有 $\dfrac{y-0}{x-(-x)}=-\dfrac{1}{y'}$，即 $yy'+2x=0$，此为曲线方程所满足的微分方程.

6. 用微分方程表示一物理命题：某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率与气压成正比，与温度的平方成反比.

解 某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率为 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}$，因它与气压成正比，与温度的平方成反比，所以若设比例系数为 k，则有 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}=k\dfrac{P}{T^2}$.

7. 一个半球体形状的雪堆，其体积融化率与半球面面积 A 成正比，比例系数 $k>0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的 7/8，问雪堆全部融化需要多少小时？

解 设在时刻 t 雪堆的半径为 r，则雪堆的体积为 $V=\dfrac{2}{3}\pi r^3$，侧面积为 $A=2\pi r^2$. 由题设知

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-kA,$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-k,$$

积分得
$$r=-kt+C.$$

由 $r\big|_{t=0}=r_0$ 得 $C=r_0$，因此有 $r=r_0-kt$. 又当 $t=3$，雪堆的体积还剩下 $\dfrac{1}{8}V$，即

$$\frac{2}{3}\pi(r_0-3t)^3=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\pi r_0^{\,3},$$

得 $k=\dfrac{1}{6}r_0$，从而

$$r=r_0-\frac{1}{6}r_0t. \tag{I}$$

因雪堆全部融化时，$r=0$. 将 $r=0$ 代入（I）式得 $t=6$，即雪堆全部融化需要 6 小时.

习题 7-2

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $xy' - y\ln y = 0$;　　(2) $3x^2 + 5x - 5y' = 0$;

(3) $\sqrt{1-x^2}\,y' = \sqrt{1-y^2}$;　　(4) $y' - xy' = a(y^2 + y')$;

(5) $\sec^2 x\tan y\mathrm{d}x + \sec^2 y\tan x\mathrm{d}y = 0$;　　(6) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 10^{x+y}$;

(7) $(\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 0$;　　(8) $\cos x\sin y\mathrm{d}x + \sin x\cos y\mathrm{d}y = 0$;

(9) $(y+1)^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^3 = 0$;　　(10) $y\mathrm{d}x + (x^2 - 4x)\mathrm{d}y = 0$.

解　(1) 将原方程分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，两端积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，得

$$\ln|\ln y| = \ln|x| + \ln C_1 = \ln|C_1 x|(C_1 > 0),$$

即 $\ln y = \pm C_1 x = Cx$，故所求通解为

$$y = \mathrm{e}^{Cx}.$$

(2) 原方程可写成 $5y' = 3x^2 + 5x$，积分得 $5y = x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 + C_1$，所以所求通解为

$$y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\left(C = \frac{1}{5}C_1\right).$$

(3) 将原方程分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$，两端积分得 $\arcsin y = \arcsin x + C$，即为原方程的通解.

(4)原方程可写成 $(1-x-a)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay^2$，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{ay^2} = \dfrac{\mathrm{d}x}{1-x-a}$，两端积分得

$$-\frac{1}{y} = -a\ln|1-x-a| - C,$$

即 $y = \dfrac{1}{a\ln|1-x-a| + C}$，此为所求原方程的通解.

(5) 原方程分离变量，得 $\dfrac{\sec^2 y}{\tan y}\mathrm{d}y = -\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}\mathrm{d}x$，两端积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}(\tan y)}{\tan y} = -\int\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan x}$，

得 $\ln|\tan y| = -\ln|\tan x| + \ln C_1$，即 $\ln|\tan y\tan x| = \ln C_1$，所以所求方程的通解为

$$\tan x\tan y = C.$$

(6)原方程分离变量，得 $10^{-y}\mathrm{d}y = 10^x\mathrm{d}x$，两端积分得 $-\dfrac{10^{-y}}{\ln 10} = \dfrac{10^x}{\ln 10} + C_1$，即

$$10^x + 10^{-y} = C(C = -C_1\ln 10),$$

此为所求原方程的通解.

(7) 原方程分离变量，得 $\dfrac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^y - 1}\mathrm{d}y = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x$，两端积分得

$$\ln|\mathrm{e}^y - 1| = -\ln(\mathrm{e}^x + 1) + \ln C_1,\ \text{即}\ \ln|(\mathrm{e}^y - 1)(\mathrm{e}^x + 1)| = \ln C_1,$$

所以所求方程的通解为 $(\mathrm{e}^y - 1)(\mathrm{e}^x + 1) = C(C = \pm C_1)$.

(8) 原方程分离变量，得 $\dfrac{\cos y}{\sin y}\mathrm{d}y = -\dfrac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$，两端积分得

$$\ln|\sin y| = -\ln|\sin x| + \ln C_1,\ 即\ \ln|\sin y\sin x| = \ln C_1,$$

所以所求方程的通解为

$$\sin y\sin x = C(C=\pm C_1).$$

(9) 原方程分离变量，得 $(y+1)^2\mathrm{d}y = -x^3\mathrm{d}x$，两端积分得 $\frac{1}{3}(y+1)^3 = -\frac{1}{4}x^4 + C_1$，所以所求方程的通解为

$$4(y+1)^3 + 3x^4 = C(C=12C_1).$$

(10) 原方程分离变量，得 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{4x-x^2}$，两端积分得

$$\ln|y| = \int\frac{1}{(4-x)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{4-x}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + \ln C_1,$$

即 $\ln\left|y^4(4-x)\right| = \ln|4xC_1|$，所以所求方程的通解为

$$y^4(4-x) = Cx(C=\pm 4C_1).$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $y' = \mathrm{e}^{2x-y}$，$y|_{x=0} = 0$；

(2) $\cos x\sin y\mathrm{d}y = \cos y\sin x\mathrm{d}x$，$y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$；

(3) $y'\sin x = y\ln y$，$y|_{x=\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}$；

(4) $\cos y\mathrm{d}x + (1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\mathrm{d}y = 0$，$y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$；

(5) $x\mathrm{d}y + 2y\mathrm{d}x = 0$，$y|_{x=2} = 1$.

解 (1) 分离变量，得 $\mathrm{e}^y\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$，两端积分得 $\mathrm{e}^y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$，将 $x=0, y=0$ 代入，得 $C=\frac{1}{2}$，所以所求特解为 $\mathrm{e}^y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}$，即 $y = \ln\frac{1+\mathrm{e}^{2x}}{2}$.

(2) 分离变量，得 $\tan y\,\mathrm{d}y = \tan x\,\mathrm{d}x$，两端积分得 $-\ln|\cos y| = -\ln|\cos x| - \ln C_1$，即 $\cos y = C\cos x$. 将 $x=0, y=\frac{\pi}{4}$ 代入，得 $C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以所求特解 $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$.

(3) 分离变量，得 $\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$，两端积分得 $\ln|\ln y| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \ln C_1$，即 $\ln y = C\tan\frac{x}{2}$. 将 $x=\frac{\pi}{2}, y=\mathrm{e}$ 代入，得 $C=1$，所以所求特解为 $y = \mathrm{e}^{\tan\frac{x}{2}}$.

(4) 分离变量，得 $\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x = -\tan y\mathrm{d}y$，两端积分得 $\ln(\mathrm{e}^x+1) = \ln|\cos y| + \ln C_1$，即

$$\mathrm{e}^x + 1 = C\cos y,$$

将初始条件 $x=0, y=\frac{\pi}{4}$ 代入，得 $C=2\sqrt{2}$，所以所求特解为 $\mathrm{e}^x + 1 = 2\sqrt{2}\cos y$.

(5) 分离变量，得 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -2\frac{\mathrm{d}x}{x}$，两端积分得 $\ln|y| = -2\ln|x| + \ln C_1 = \ln C_1x^{-2}$，即 $x^2y = C$. 将初始条件 $x=2, y=1$ 代入，得 $C=4$，所以所求特解为 $x^2y=4$.

3. 有一盛满了水的圆锥形漏斗，高为10 cm，顶角为60°，漏斗下面有面积为0.5cm^2的孔，求水面高度变化的规律及水流完所需的时间.

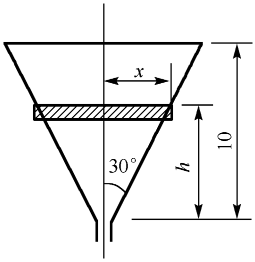


图 7-1

解 圆锥形漏斗的剖面图如图 7-1 所示.

水从孔口流出的流量Q是单位时间内流出孔口的水的体积，即$Q=\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$. 根据力学可知，$Q=0.62S\sqrt{2gh}$，其中 0.62 为流量系数，$S$为孔口截面积，$g$为重力加速度，$h$为水面到孔口的高度. 所以有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0.62S\sqrt{2gh}\text{，即 }\mathrm{d}V=0.62S\sqrt{2gh}\mathrm{d}t \tag{1}$$

设在时刻t，水面高度为$h=h(t)$. 从图 7-1 中可见，$x=h\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}h$，于是在时间间隔$[t,t+\mathrm{d}t]$内漏斗流出的水的体积，即水体积的改变量

$$\mathrm{d}V=-\pi x^2\mathrm{d}h=-\frac{\pi}{3}h^2\mathrm{d}h \tag{2}$$

由(1)式和(2)式得微分方程

$$0.62S\sqrt{2gh}\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{3}h^2\mathrm{d}h.$$

并有初始条件$h\big|_{t=0}=10$. 微分方程分离变量得

$$\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{1.86S\sqrt{2g}}h^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}h,$$

两端积分得

$$t=-\frac{2\pi}{9.3S\sqrt{2g}}h^{\frac{5}{2}}+C.$$

将初始条件$t=0,h=10$代入，得$C=\dfrac{2\pi}{9.3S\sqrt{2g}}10^{\frac{5}{2}}$.

所以$t=\dfrac{2\pi}{9.3S\sqrt{2g}}(10^{\frac{5}{2}}-h^{\frac{5}{2}})$. 将$S=0.5(\text{cm}^2),g=980(\text{cm/s}^2),h=0$代入，得

$$t=9.64(\text{s}),$$

即水流完所需时间约为 10 秒.

4. 质量为1g的质点受外力作用作直线运动，该外力和时间成正比，和质点运动的速度成反比. 在$t=10\text{s}$时，速度等于50cm/s，外力为$4\text{g}\cdot\text{cm/s}^2$，问从运动开始经过一分钟后的速度是多少？

解 设在时刻t，质点的运动速度为$v=v(t)$. 根据题意，有$f=mv'=k\dfrac{t}{v}$，其中f为质点所受外力，k为比例系数. 将$t=10s,v=50,f=4$代入上式，得$k=20$. 故微分方程为

$$v'=20\frac{t}{v}.$$

分离变量，得$v\mathrm{d}v=20t\mathrm{d}t$，两端积分得$v^2=20t^2+C$. 再将$t=10,v=50$代入，得$C=500$. 所以有特解

$$v=\sqrt{20t^2+500},$$

从而 $t=60\text{s}$ 时，$v=\sqrt{20\times 60^2+500}=269.3(\text{cm/s})$．

5. 镭的衰变有如下的规律：镭的衰变速度与其现存量 R 成正比．由经验材料得知，镭经过1600年后，只余原始量 R_0 的一半．试求镭的现存量 R 与时间 t 的函数关系．

解　设在时刻 t 镭的存量为 $R=R(t)$．由题设条件知 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-\lambda R$．解此微分方程，得 $R=C\mathrm{e}^{-\lambda t}$．将 $t=0,R=R_0$ 代入，得 $C=R_0$．所以

$$R=R_0\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

再将 $t=1600,R=\frac{1}{2}R_0$ 代入上式，得 $\frac{1}{2}=\mathrm{e}^{-1600\lambda}$，解之得 $\lambda=\frac{\ln 2}{1600}$，所以所求函数关系为

$$R=R_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{1600}t}=R_0\mathrm{e}^{-0.000433t}.$$

6. 一曲线通过点 $(2,3)$，它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分，求该曲线方程．

解　设所求曲线方程为 $y=y(x)$，切点 (x,y)．所以根据条件可知，切线在 x 轴与 y 轴上的截距分别为 $2x$ 和 $2y$，所以切线的斜率

$$y'=\frac{2y-0}{0-2x}=-\frac{y}{x}$$

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$，两端积分得 $\ln|y|=-\ln|x|+\ln C_1$，即 $xy=C$．将条件 $x=2,y=3$ 代入，得 $C=6$．故曲线方程为 $xy=6$．

7. 小船从河边点 O 处出发驶向对岸（两岸为平行直线）．设船速为 a，船行方向始终与河岸垂直，又设河宽为 h，河中任意一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比（比例系数为 k）．求小船的航行路线．

解　设小船的航行路线为 $C:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ 则在时刻 t，小船的实际航行速度为 $v(t)=(x'(t),y'(t))$，其中 $x'(t)=ky(h-y)$ 为水的流速，$y'(t)=a$ 为小船的主动速度．

由于小船航行路线的切线方向就是小船的实际速度方向，故有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a}{ky(h-y)}.$$

分离变量，得 $\mathrm{d}x=\frac{k}{a}y(h-y)\mathrm{d}y$，两端积分得 $x=\frac{k}{a}\left(\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)+C$．

由于小船始发于点 $(0,0)$，所以将 $x=0,y=0$ 代入，得 $C=0$，故小船航行的路线的方程为

$$x=\frac{k}{a}\left(\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right),\quad y\in[0,h].$$

习题 7-3

1. 求下列齐次方程的通解．

(1) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$；　　(2) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln\frac{y}{x}$；

(3) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x - xy\mathrm{d}y = 0$; (4) $(x^3+y^3)\mathrm{d}x - 3xy^2\mathrm{d}y = 0$;

(5) $\left(2x\sin\dfrac{y}{x} + 3y\cos\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x - 3x\cos\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y = 0$; (6) $(1+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x + 2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}y = 0$.

解 (1) 当 $x>0$ 时，原方程可写成 $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1}$，令 $u = \dfrac{y}{x}$，即 $y = xu$，有 $y' = u + xu'$，从而原方程变化成

$$u + xu' = u + \sqrt{u^2+1},$$

分离变量，得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得

$$\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| = \ln xC_1,$$

即 $u+\sqrt{u^2-1} = Cx(C=\pm C_1)$. 将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式并整理，得所求通解为 $y+\sqrt{y^2-x^2} = Cx^2$.

当 $x<0$ 时，同法可得方程的通解为 $y+\sqrt{y^2-x^2} = Cx^2$.

(2) 原方程可写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$，有 $y'=u+xu'$，从而原方程变成

$$u + xu' = u\ln u,$$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得

$$\ln|\ln u - 1| = \ln C_1|x|,$$

即 $\ln u - 1 = Cx(C=\pm C_1)$. 将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式并整理，得所求通解为 $\ln\dfrac{y}{x} = Cx+1$.

(3) 原方程可写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$，有 $y'=u+xu'$，从而原方程变成

$$u + xu' = u + \frac{1}{u},$$

分离变量得 $u\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得 $\dfrac{u^2}{2} = \ln|x| + C_1$. 将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式并整理，得所求通解为

$$y^2 = x^2(2\ln|x| + C).$$

(4) 原方程可写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \dfrac{y}{x}\right]$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$，有 $y'=u+xu'$，从而原方程变成

$$u + xu' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u^2} + u\right).$$

分离变量得

$$\frac{3u^2}{1-2u^3}\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

积分得

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-2u^3\right| = \ln|x| + \ln C_1,$$

即

$$1-2u^3 = \pm\frac{1}{C_1^{\,2}x^2} = C\frac{1}{x^2}.$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式并整理, 得所求通解为 $x^3-2y^3=Cx$.

(5) 原方程可写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{3}\tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$, 令 $u=\frac{y}{x}$, 即 $y=xu$, 有 $y'=u+xu'$, 从而原方程变成

$$u+xu'=\frac{2}{3}\tan u+u.$$

分离变量得

$$\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得

$$\frac{3}{2}\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln C_1,$$

即 $\sin^3 u = Cx^2 (C=\pm C_1)$. 将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式并整理, 得所求通解为 $\sin^3\frac{y}{x}=Cx^2$.

(6) 原方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}-1\right)}{1+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}},$$

令 $u=\frac{x}{y}$, 即 $x=yu$, 从而有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$, 所以原方程变成

$$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{2\mathrm{e}^u(u-1)}{1+2\mathrm{e}^u},$$

整理并分离变量, 得

$$\frac{1+2\mathrm{e}^u}{2\mathrm{e}^u+u}\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

两端积分 $\int\frac{\mathrm{d}(u+2\mathrm{e}^u)}{u+2\mathrm{e}^u}=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y}$, 得

$$\ln\left|u+2\mathrm{e}^u\right| = -\ln|y| + \ln C_1,$$

即 $y(u+2\mathrm{e}^u)=C(C=\pm C_1)$. 将 $u=\frac{x}{y}$ 代入上式并整理, 得所求通解为 $x+2y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=C$.

2. 求下列齐次方程满足所给初始条件的特解.

(1) $(y^2-3x^2)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x=0$, $y\big|_{x=0}=1$;

(2) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, $y\big|_{x=1}=2$;

(3) $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(y^2+2xy-x^2)\mathrm{d}y=0$, $y\big|_{x=1}=1$.

解 (1) 原方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{3x^2-y^2}{2xy}=\frac{3}{2}\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\frac{y}{x}.$$

令 $u=\dfrac{x}{y}$，即 $x=yu$，从而有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，所以原方程变成

$$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{3}{2}u-\frac{1}{2u},$$

分离变量得 $\dfrac{2u}{u^2-1}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$，积分得 $\ln\left|u^2-1\right|=\ln|y|+\ln C_1$，即

$$u^2-1=Cy.$$

将 $u=\dfrac{x}{y}$ 代入上式并整理，得通解 $x^2-y^2=Cy^3$．将初始条件 $x=0,y=1$ 代入，得 $C=-1$．所以所求特解为 $y^3=y^2-x^2$．

(2) 令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$，有 $y'=u+xu'$，从而原方程变成

$$u+xu'=u+\frac{1}{u},$$

分离变量得 $u\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得

$$\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式并整理，得通解

$$y^2=2x^2(\ln|x|+C).$$

将初始条件 $x=1,y=2$ 代入，得 $C=2$．所以所求特解为 $y^2=2x^2(\ln|x|+2)$．

(3) 原方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x^2+2xy-y^2}{y^2+2xy-x^2}=\frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-2\dfrac{y}{x}-1}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+2\dfrac{y}{x}-1}.$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$，有 $y'=u+xu'$，从而原方程变成

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1},$$

分离变量得

$$\frac{1-2u-u^2}{u^3+u^2+u+1}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得

$$\ln|x|+\ln C_1=\int\frac{1-2u-u^2}{u^3+u^2+u+1}\mathrm{d}u=\int\left(\frac{1}{u+1}-\frac{2u}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u=\ln\frac{|u+1|}{u^2+1},$$

即 $\dfrac{u+1}{u^2+1}=Cx$. 将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入并整理，得通解

$$\frac{y+x}{y^2+x^2}=C.$$

将初始条件 $x=1,y=1$ 代入通解中，解得 $C=1$. 所以所求特解为 $\dfrac{y+x}{y^2+x^2}=1$.

3. 设有连接点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$，对于 $\overset{\frown}{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$，曲线弧 $\overset{\frown}{OP}$ 与直线段 $\overline{OP}$ 所围成图形的面积为 x^2，求曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程.

解 设曲线弧的方程为 $y=y(x)$. 由题意，有

$$\int_0^x y\mathrm{d}x-\frac{1}{2}xy=x^2.$$

上式两端对 x 求导，得 $y-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}xy'=2x$，即得微分方程

$$y'=\frac{y}{x}-4.$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$，有 $y'=u+xu'$，则微分方程变成

$$u+xu'=u-4,$$

即 $u'=-\dfrac{4}{x}$. 积分得 $u=-4\ln x+C$. 将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入，有

$$y=x(-4\ln x+C).$$

再将 $x=1,y=1$ 代入，得 $C=1$. 所以所求曲线的方程为 $y=x(1-4\ln x)$.

***4**. 化下列方程为齐次方程，并求出通解.

(1) $(2x-5y+3)\mathrm{d}x-(2x+4y-6)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(x-y-1)\mathrm{d}x+(4y+x-1)\mathrm{d}y=0$;

(3) $(3y-7x+7)\mathrm{d}x+(7y-3x+3)\mathrm{d}y=0$;

(4) $(x+y)\mathrm{d}x+(3x+3y-4)\mathrm{d}y=0$.

解 (1) 令 $x=X+h,y=Y+k$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X,\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$，且原方程成为

$$(2X-5Y+2h-5k+3)\mathrm{d}X-(2X+4Y+2h+4k-6)\mathrm{d}Y=0.$$

令 $\begin{cases}2h-5k+3=0,\\2h+4k-6=0,\end{cases}$ 解之得 $h=1,k=1$. 所以在变换 $x=X+1,y=Y+1$ 下，原方程化为

$$(2X-5Y+)\mathrm{d}Y-(2X+4Y)\mathrm{d}Y=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{2X-5Y}{2X+4Y}=\frac{2-5\dfrac{Y}{X}}{2+4\dfrac{Y}{X}}.$$

令 $u=\dfrac{Y}{X}$，即 $Y=uX$，有 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$，则上式可变为

$$u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\frac{2-5u}{2+4u},$$

分离变量，得

$$\frac{4u+2}{4u^2+7u-2}\mathrm{d}u=-\frac{1}{X}\mathrm{d}X,$$

积分

$$\int\frac{4u+2}{4u^2+7u-2}\mathrm{d}u=\int\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{u+2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4u-1}\right)\mathrm{d}u=\frac{2}{3}\ln|u+2|+\frac{1}{3}\ln|4u-1|$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|(u+2)^2(4u-1)\right|=-\ln|X|+\ln C_1.$$

即 $$\ln\left|(u+2)^2(4u-1)\right|+3\ln|X|=\ln C_1.,$$

从而有 $$(u+2)^2(4u-1)X^3=C.$$

将 $u=\dfrac{Y}{X}$ 代入，得 $$(2X+Y)^2(4Y-X)=C.$$

再将 $X=x-1,Y=y-1$ 代入上式，得原方程的通解为 $(2x+y-3)^2(4y-x-3)=C$.

(2) 原方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-x+y+1}{4y+x-1}=\frac{y-(x-1)}{4y+(x-1)},$$

令 $X=x-1,Y=y$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X,\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$，原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{Y-X}{4Y+X}=\frac{\dfrac{Y}{X}-1}{4\dfrac{Y}{X}+1}.$$

令 $u=\dfrac{Y}{X}$，即 $Y=uX$，有 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$，则上式可化为

$$u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\frac{u-1}{4u+1}.$$

分离变量，得 $\dfrac{4u+1}{4u^2+1}\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{X}\mathrm{d}X$.

积分 $$\int\frac{4u+2}{4u^2+1}\mathrm{d}u=\int\left(\frac{4u}{4u^2+1}+\frac{1}{4u^2+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\ln(4u^2+1)+\frac{1}{2}\arctan(2u)=-\ln|X|+C_1,$$

即 $\ln\left[X^2(4u^2+1)\right]+\arctan(2u)=C(C=2C_1)$.

将 $u=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{y}{x-1}$ 代入上式，得原方程的通解为 $\ln\left[4y^2+(x-1)^2\right]+\arctan\dfrac{2y}{x-1}=C$.

(3) 令 $x=X+h,y=Y+k$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X,\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$，原方程化为

$$(3Y-7X+3k-7h+7)\mathrm{d}X+(7Y-3X+7k-3h+3)\mathrm{d}Y=0.$$

令 $\begin{cases}3k-7h+7=0,\\7k-3h+3=0,\end{cases}$ 解之得 $h=1,k=0$. 所以在变换 $x=X+1,y=Y$ 下，原方程化为

$$(3Y-7X)\mathrm{d}X+(7Y-3X)\mathrm{d}Y=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{7X-3Y}{7Y-3X}=\frac{7-3\frac{Y}{X}}{7\frac{Y}{X}-3}.$$

令 $u=\frac{Y}{X}$，即 $Y=uX$，有 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$，则上式可化为

$$u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\frac{7-3u}{7u-3}.$$

分离变量，得

$$\frac{7u-3}{u^2-1}\mathrm{d}u=-7\frac{\mathrm{d}X}{X}.$$

积分得

$$\int\frac{7u-3}{u^2-1}\mathrm{d}u=\int\left(\frac{2}{u-1}+\frac{5}{u+1}\right)\mathrm{d}u=2\ln|u-1|+5\ln|u+1|=-7\ln|X|+\ln C_1,$$

即 $X^7(u-1)^2(u+1)^5=C(C=\pm C_1)$. 将 $u=\frac{Y}{X}=\frac{y}{x-1}$ 代入上式，得原方程的通解为

$$(y-x+1)^2(y+x-1)^5=C.$$

(4) 原方程可写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{4-3(x+y)}$. 所以可令 $u=x+y$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$，故原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=\frac{u}{4-3u}.$$

分离变量得 $\frac{3u-4}{u-2}\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$，积分得

$$\int\frac{3u-4}{u-2}\mathrm{d}u=\int\left(3+\frac{2}{u-2}\right)\mathrm{d}u=3u+2\ln|u-2|=2x+C.$$

将 $u=x+y$ 代入上式，得原方程的通解为 $x+3y+2\ln|x+y-2|=C$.

习题 7-4

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\mathrm{e}^{-x}$;

(2) $xy'+y=x^2+3x+2$;

(3) $y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}$;

(4) $y'+y\tan x=\sin 2x$;

(5) $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$;

(6) $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}+3\rho=2$;

(7) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=4x$;

(8) $y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$;

(9) $(x-2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+2(x-2)^3$;

(10) $(y^2-6x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$.

解 (1) $y=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-x}\left(\int\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}(x+C)$.

(2) 方程可写成

$$y'+\frac{1}{x}y=x+3+\frac{2}{x},$$

则所求通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\left(x+3+\frac{2}{x}\right)\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}\left[\int\left(x+3+\frac{2}{x}\right)x\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int(x^2+3x+2)\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C\right)=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+2+C\frac{1}{x}.$$

(3) $y=\mathrm{e}^{-\int\cos x\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{-\sin x}\cdot\mathrm{e}^{\int\cos x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-\sin x}\left(\int\mathrm{e}^{-\sin x}\cdot\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\sin x}(x+C)$.

(4) $y=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left[\int\sin 2x\cdot\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$=\cos x\left(\int\frac{\sin 2x}{\cos x}\mathrm{d}x+C\right)=\cos x\left(\int 2\sin x\mathrm{d}x+C\right)=\cos x(C-2\cos x).$$

(5) 原方程可写成

$$y'+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1},$$

则所求通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}(x^2-1)\mathrm{d}x+C\right]=\frac{\sin x+C}{x^2-1}.$$

(6) $\rho=\mathrm{e}^{-\int 3\mathrm{d}\theta}\left[\int 2\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta+C\right]=\mathrm{e}^{-3\theta}\left(\int 2\mathrm{e}^{3\theta}\mathrm{d}\theta+C\right)=\mathrm{e}^{-3\theta}\left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3\theta}+C\right)=\frac{2}{3}+C\mathrm{e}^{-3\theta}$.

(7) $y=\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left[\int 4x\cdot\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-x^2}\left(\int 4x\cdot\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x^2}(2\mathrm{e}^{x^2}+C)=2+C\mathrm{e}^{-x^2}$.

(8) 原方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y\ln y}x=\frac{1}{y},$$

则所求通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}}\left(\int\frac{1}{y}\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}}\mathrm{d}y+C_1\right)=\mathrm{e}^{-\ln|\ln y|}\left[\int\frac{1}{y}\mathrm{e}^{\ln|\ln y|}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=\frac{1}{\ln y}\left(\int\frac{\ln y}{y}\mathrm{d}y+C\right)=\frac{1}{\ln y}\left(\frac{1}{2}\ln^2 y+C\right).$$

(9) 原方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x-2}y=2(x-2)^2,$$

则所求通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x}\left[\int 2(x-2)^2\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=(x-2)\left[\int 2(x-2)^2\cdot\frac{1}{(x-2)}\mathrm{d}x+C\right]=(x-2)\left[\int 2(x-2)\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=(x-2)\left[(x-2)^2+C\right]=(x-2)^3+C(x-2).$$

(10) 原方程可写成

$$\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2},$$

则所求通解为

$$x=e^{\int\frac{3dy}{y}}\left(\int -\frac{y}{2}e^{-\int\frac{3dy}{y}}dy+C\right)=y^3\left(\int -\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{y^3}dy+C\right)$$

$$=y^3\left(\int -\frac{1}{2y^2}dy+C\right)=y^3\left(\frac{1}{2y}+C\right)=\frac{y^2}{2}+Cy^3.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $\frac{dy}{dx}-y\tan x=\sec x,\quad y|_{x=0}=0$；　　(2) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x},\quad y|_{x=\pi}=1$；

(3) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x},\quad y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$；　　(4) $\frac{dy}{dx}+3y=8,\quad y|_{x=0}=2$；

(5) $\frac{dy}{dx}+\frac{2-3x^2}{x^3}y=1,\quad y|_{x=1}=0$.

解 (1) $y=e^{\int\tan x dx}\left(\int\sec x\cdot e^{-\int\tan x dx}dx+C\right)=e^{-\ln|\cos x|}\left(\int\sec x\cdot e^{\ln|\cos x|}dx+C\right)$

$$=\frac{1}{\cos x}\left(\int\sec x\cdot\cos x dx+C\right)=\frac{x+C}{\cos x}.$$

将初始条件 $x=0,y=0$ 代入上式，得 $C=0$. 所以所求特解为 $y=\frac{x}{\cos x}$.

(2) $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot x dx+C\right)=\frac{C-\cos x}{x}.$

将初始条件 $x=\pi,y=1$ 代入上式，得 $C=\pi-1$. 所以所求特解为 $y=\frac{\pi-1-\cos x}{x}$.

(3) $y=e^{-\int\cot x dx}\left(\int 5e^{\cos x}e^{\int\cot x dx}dx+C\right)=\frac{1}{\sin x}\left(\int 5e^{\cos x}\cdot\sin x dx+C\right)=\frac{C-5e^{\cos x}}{\sin x}.$

将初始条件 $x=\frac{\pi}{2},y=-4$ 代入上式，得 $C=1$. 所以所求特解为 $y=\frac{1-5e^{\cos x}}{\sin x}$.

(4) $y=e^{-\int 3dx}\left(\int 8e^{\int 3dx}dx+C\right)=e^{-3x}\left(\int 8e^{3x}dx+C\right)=e^{-3x}\left(\frac{8}{3}e^{3x}+C\right)=\frac{8}{3}+Ce^{-3x}.$

将初始条件 $x=0,y=2$ 代入上式，得 $C=-\frac{2}{3}$，故所求特解为 $y=\frac{2}{3}(4-e^{-3x})$.

(5) $y=e^{-\int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}\right)dx}\left[\int e^{\int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}\right)dx}dx+C\right]=e^{\frac{1}{x^2}+3\ln x}\left(\int e^{-\left(\frac{1}{x^2}+3\ln x\right)}dx+C\right)$

$$=x^3e^{\frac{1}{x^2}}\left(\int\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx+C\right)=x^3e^{\frac{1}{x^2}}\left[\frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{x^2}}d\left(-\frac{1}{x^2}\right)+C\right]=x^3e^{\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}+C\right),$$

将初始条件 $x=1,y=0$ 代入上式，得 $C=\frac{1}{2e}$. 所以所求特解为 $y=\frac{x^3}{2}\left(1-e^{\frac{1}{x^2}-1}\right)$.

3. 求一曲线的方程，该曲线通过原点，并且它在点 (x,y) 处的切线斜率等于 $2x+y$.

解 设曲线方程为 $y=y(x)$，根据题意有 $y'=2x+y$，即 $y'-y=2x$. 又因为曲线过原点, 所以有初始条件 $y\big|_{x=0}=0$.

所以有
$$y=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int 2x\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{x}\left(\int 2x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=\mathrm{e}^{x}(-2x\mathrm{e}^{-x}-2\mathrm{e}^{-x}+C)=-2x-2+C\mathrm{e}^{x}.$$

将初始条件 $x=0, y=0$ 代入上式, 得 $C=2$. 所以所求曲线的方程为 $y=2(\mathrm{e}^{x}-x-1)$.

4. 设有一质量为 m 的质点作直线运动, 从速度等于零的时刻起, 有一个与运动方向一致、大小与时间成正比（比例系数为 k_1）的力作用于它, 此外还受一与速度成正比（比例系数为 k_2）的阻力作用. 求质点运动的速度与时间的函数关系.

解 设质点运动的速度与时间的函数为 $v=v(t)$，根据题意有 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=k_1t-k_2v$，且有初始条件 $v\big|_{t=0}=0$.

方程可写成 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\dfrac{k_2}{m}v=\dfrac{k_1}{m}t$，所以根据一阶线性微分方程的求解公式, 可得
$$v=\mathrm{e}^{-\int\frac{k_2}{m}\mathrm{d}t}\left(\int\frac{k_1}{m}t\mathrm{e}^{\int\frac{k_2}{m}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right)=\mathrm{e}^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\frac{k_1}{m}\int t\mathrm{e}^{\frac{k_2}{m}t}\mathrm{d}t+C\right)$$
$$=\mathrm{e}^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\frac{k_1}{k_2}\int t\mathrm{d}\mathrm{e}^{\frac{k_2}{m}t}+C\right)=\mathrm{e}^{-\frac{k_2}{m}t}\left[\frac{k_1}{k_2}\left(t\mathrm{e}^{\frac{k_2}{m}t}-\int\mathrm{e}^{\frac{k_2}{m}t}\mathrm{d}t\right)+C\right].$$
$$=\mathrm{e}^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\frac{k_1}{k_2}t\mathrm{e}^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{k_1m}{k_2^2}\mathrm{e}^{\frac{k_2}{m}t}+C\right)=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1m}{k_2^2}+C\mathrm{e}^{-\frac{k_2}{m}t}$$

将初始条件 $t=0, v=0$ 代入上式, 得 $C=\dfrac{k_1m}{k_2^2}$. 所以所求的函数关系为
$$v=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1m}{k_2^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k_2}{m}t}\right).$$

5. 设有一个由电阻 $R=10\Omega$、电感 $L=2\mathrm{H}$ 和电源电压 $E=20\sin 5t$ V 串联组成的电路. 开关 S 合上后, 电路中有电流通过. 求电流 i 与时间 t 的函数关系.

解 根据题意有 $20\sin 5t=10i+2\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，即为 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+5i=10\sin 5t$，且有初始条件 $i\big|_{t=0}=0$.

根据一阶线性微分方程的求解公式, 得
$$i=\mathrm{e}^{-\int 5\mathrm{d}t}\left(\int 10\sin 5t\mathrm{e}^{\int 5\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right)=\mathrm{e}^{-5t}\left(\int 10\sin 5t\mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t+C_1\right).$$

令 $I=\displaystyle\int 10\sin 5t\mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t$，则有
$$I=2\int\sin 5t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{5t})=2\sin5t\cdot\mathrm{e}^{5t}-2\int\mathrm{e}^{5t}\cos5t\cdot5\mathrm{d}t$$
$$=2\sin5t\cdot\mathrm{e}^{5t}-2\int\cos5t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{5t})$$
$$=2\sin5t\cdot\mathrm{e}^{5t}-2\cos5t\cdot\mathrm{e}^{5t}-10\int\sin5t\cdot\mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t$$
$$=2\mathrm{e}^{5t}(\sin 5t-\cos 5t)-I,$$

即 $I=\mathrm{e}^{5t}(\sin 5t-\cos 5t)+C_2$，因而

$$\begin{aligned} i &= \mathrm{e}^{-5t}\left[\mathrm{e}^{5t}(\sin 5t-\cos 5t)+C\right] \ (C=C_1+C_2) \\ &= \sin 5t-\cos 5t+C\mathrm{e}^{-5t} \end{aligned}.$$

将初始条件 $t=0, i=0$ 代入上式，得 $C=1$．故电流 i 与时间 t 的函数关系为

$$i=\sin 5t-\cos 5t+\mathrm{e}^{-5t}=\mathrm{e}^{-5t}+\sqrt{2}\sin\left(5t-\frac{\pi}{4}\right).$$

6. 验证形如 $yf(xy)\mathrm{d}x+xg(xy)\mathrm{d}y=0$ 的微分方程，可经变量代换 $v=xy$ 化为可分离变量的方程，并求其通解.

解 由 $v=xy$，即 $y=\dfrac{v}{x}$，得 $\mathrm{d}y=\dfrac{x\mathrm{d}v-v\mathrm{d}x}{x^2}$．又因为原方程可写成 $xyf(xy)\mathrm{d}x+x^2g(xy)\mathrm{d}y=0$，从而将 $v=xy$ 及 $\mathrm{d}y=\dfrac{x\mathrm{d}v-v\mathrm{d}x}{x^2}$ 代入，得

$$vf(v)\mathrm{d}x+g(v)(x\mathrm{d}v-v\mathrm{d}x)=0,$$

分离变量，得
$$\frac{g(v)}{v\left[g(v)-f(v)\right]}\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分，得
$$\int\frac{g(v)}{v\left[g(v)-f(v)\right]}\mathrm{d}v=\ln|x|+C,$$

将 $v=xy$ 代入，可得原方程的通解为

$$\int\frac{g(xy)}{xy\left[g(xy)-f(xy)\right]}\mathrm{d}xy=\ln|x|+C.$$

7. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程，然后求出通解.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$；　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x-y}+1$；

(3) $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$；

(4) $y'=y^2+2(\sin x-1)y+\sin^2 x-2\sin x-\cos x+1$；

(5) $y(xy+1)\mathrm{d}x+x(1+xy+x^2y^2)\mathrm{d}y=0$.

解 (1) 令 $u=x+y$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．所以原方程变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u^2+1.$$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\mathrm{d}x$，积分得 $\arctan u=x+C$，即 $u=\tan(x+C)$．将 $u=x+y$ 代入，可得原方程的通解为 $y=-x+\tan(x+C)$.

(2) 令 $u=x-y$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．所以原方程变为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{u}.$$

分离变量得 $u\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$，积分得 $\frac{1}{2}u^2=-x+C_1$. 将 $u=x-y$ 代入，可得原方程的通解为

$$(x-y)^2+2x=C\ \ (C=2C_1).$$

(3) 令 $u=xy$，则 $u'=y+xy'$. 所以原方程变为

$$u'=\frac{u}{x}\ln u,$$

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得 $\ln|\ln u|=\ln|x|+\ln C_1$，即 $u=\mathrm{e}^{Cx}\,(C=\pm C_1)$. 将 $u=xy$ 代入，可得原方程的通解为

$$y=\frac{\mathrm{e}^{Cx}}{x}.$$

(4) 原方程可写成

$$y'+\cos x=(y+\sin x-1)^2,$$

所以令 $u=y+\sin x-1$，则 $u'=y'+\cos x$，从而原方程变为

$$u'=u^2.$$

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\mathrm{d}x$，积分得 $-\frac{1}{u}=x+C$. 将 $u=y+\sin x-1$ 代入并整理，得原方程的通解为

$$y=1-\sin x-\frac{1}{x+C}.$$

(5) 原方程可写成

$$xy(xy+1)+x^2(1+xy+x^2y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

令 $u=xy$，即 $y=\frac{u}{x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u}{x^2}$. 于是原方程变为

$$u(u+1)+(1+u+u^2)\left(x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u\right)=0,$$

即 $x(1+u+u^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u^3=0$. 分离变量并整理，得

$$\left(\frac{1}{u^3}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分，得 $-\frac{1}{2u^2}-\frac{1}{u}+\ln|u|=\ln|x|+C_1$，即 $2u^2\ln\left|\frac{u}{x}\right|-2u-1=2C_1u^2$.

将 $u=xy$ 代入，并令 $C=2C_1$，可得原方程的通解为 $2x^2y^2\ln|y|-2xy-1=Cx^2y^2$.

***8**. 求下列伯努利方程的通解.

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=y^2(\cos x-\sin x)$;　　(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3xy=xy^2$;

(3) $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}(1-2x)y^4$；　　(4) $\frac{dy}{dx}-y=xy^5$；

(5) $x\mathrm{d}y-\left[y+xy^3(1+\ln x)\right]\mathrm{d}x=0$.

解　(1) 原方程可写成$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}=\cos x-\sin x$，且令$z=\frac{1}{y}$，则$z'=-\frac{1}{y^2}y'$. 所以原方程变为

$$z'-z=\sin x-\cos x.$$

故根据一阶线性微分方程的通解公式，得

$$\begin{aligned}z&=\mathrm{e}^{\int dx}\left[\int(\sin x-\cos x)\mathrm{e}^{-\int dx}dx+C\right]\\&=\mathrm{e}^{x}\left[\int(\sin x-\cos x)\mathrm{e}^{-x}dx+C\right]\\&=\mathrm{e}^{x}\left(\int\sin x\cdot\mathrm{e}^{-x}dx-\int\cos x\cdot\mathrm{e}^{-x}dx+C\right)\end{aligned},$$

其中$\int\sin x\cdot\mathrm{e}^{-x}dx=-\int\sin x\,d(\mathrm{e}^{-x})=-\sin x\cdot\mathrm{e}^{-x}+\int\cos x\cdot\mathrm{e}^{-x}dx$，故

$$z=\mathrm{e}^{x}(C-\sin x\cdot\mathrm{e}^{-x}).$$

将$z=\frac{1}{y}$代入上式，得所求通解为$y=\frac{1}{C\mathrm{e}^x-\sin x}$.

(2) 原方程可写成$\frac{1}{y^2}y'-3x\frac{1}{y}=x$，且令$z=\frac{1}{y}$，则$z'=-\frac{1}{y^2}y'$. 所以原方程变为

$$z'+3xz=-x.$$

从而有

$$\begin{aligned}z&=\mathrm{e}^{-\int 3xdx}\left(\int -x\mathrm{e}^{\int 3xdx}dx+C\right)=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}\left(\int -x\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x^2}dx+C\right)\\&=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x^2}+C\right)=-\frac{1}{3}+C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}\end{aligned}.$$

将$z=\frac{1}{y}$代入上式，得所求通解为$y^{-1}=-\frac{1}{3}+C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}$.

(3) 原方程可写成$3\frac{1}{y^4}y'+\frac{1}{y^3}=1-2x$，且令$z=\frac{1}{y^3}$，则$z'=-3\frac{1}{y^4}y'$. 所以原方程变为

$$z'-z=2x-1.$$

从而有

$$\begin{aligned}z&=\mathrm{e}^{\int dx}\left(\int(2x-1)\mathrm{e}^{-\int dx}dx+C\right)=\mathrm{e}^{x}\left(\int(2x-1)\mathrm{e}^{-x}dx+C\right)\\&=\mathrm{e}^{x}(-2x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+C)=-2x-1+C\mathrm{e}^{x}\end{aligned},$$

将$z=\frac{1}{y^3}$代入上式，得所求通解为$y^{-3}=-2x-1+C\mathrm{e}^{x}$.

(4) 原方程可写成 $y^{-5}y'-y^4=x$，且令 $z=y^{-4}$，则 $z'=-4y^{-5}y'$．所以原方程变为

$$z'+4z=-4x.$$

从而有

$$\begin{aligned}z&=\mathrm{e}^{-\int 4\mathrm{d}x}\left(\int -4x\mathrm{e}^{\int 4\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-4x}\left(-4\int x\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{-4x}\left(-x\mathrm{e}^{4x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}+C\right)=-x+\frac{1}{4}+C\mathrm{e}^{-4x}\end{aligned}.$$

将 $z=y^{-4}$ 代入上式，得所求通解为 $y^{-4}=-x+\dfrac{1}{4}+C\mathrm{e}^{-4x}$．

(5) 原方程可写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+y^3(1+\ln x)$，即 $y^{-3}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{x}y^{-2}=1+\ln x$．令 $z=y^{-2}$，则 $z'=-2y^{-3}y'$．所以原方程变为

$$z'+\frac{2}{x}z=-2(1+\ln x).$$

从而有

$$\begin{aligned}z&=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[\int -2(1+\ln x)\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x^{-2}\left[\int -2(1+\ln x)x^2\mathrm{d}x+C\right]\\&=x^{-2}\left(C-\frac{2}{3}x^3-2\int\ln x\cdot x^2\mathrm{d}x\right),\end{aligned}$$

其中 $\int\ln x\cdot x^2\mathrm{d}x=\int\ln x\,\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\int\dfrac{1}{3}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+C_1$，所以

$$z=x^{-2}\left[C-\frac{2}{3}x^3-2\left(\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3\right)\right]=x^{-2}\left(C-\frac{2}{3}x^3\ln x-\frac{4}{9}x^3\right).$$

将 $z=y^{-2}$ 代入上式，得所求通解为

$$y^{-2}=x^{-2}\left(C-\frac{2}{3}x^3\ln x-\frac{4}{9}x^3\right),$$

或写成 $\dfrac{x^2}{y^2}=C-\dfrac{2}{3}x^3\ln x-\dfrac{4}{9}x^3$．

习题 7-5

1. 求下列各微分方程的通解.

(1) $y''=x+\sin x$；
(2) $y'''=x\mathrm{e}^x$；
(3) $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$；
(4) $y''=1+y'^2$；
(5) $y''=y'+x$；
(6) $xy''+y'=0$；
(7) $yy''+2y'^2=0$；
(8) $y^3y''-1=0$；
(9) $y''=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$；
(10) $y''=(y')^3+y'$．

解 (1) $y'=\int(x+\sin x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1$； $y=\int\left(\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$.

(2) $y''=\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C_1$； $y'=\int(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C_1)\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x+C_1x+C_2$；

$$y=\int y'\mathrm{d}x=\int(x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x+C_1x+C_2)\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^x+C_1x^2+C_2x+C_3.$$

(3) $y'=\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C_1$；

$$y=\int(\arctan x+C_1)\mathrm{d}x=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+C_1x=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2.$$

(4) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=1+p^2,\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=\mathrm{d}x,$$

积分得 $\arctan p=x+C_1$，即 $y'=\tan(x+C_1)$，所以

$$y=\int\tan(x+C_1)\mathrm{d}x=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2.$$

(5) 令 $y'=p$，则原方程变为

$$p'=p+x，即\ p'-p=x,$$

此为关于 p 的非齐次线性方程, 利用常数变易法得到的求解公式, 得

$$p=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(C_1+\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^x(C_1-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x})=C_1\mathrm{e}^x-x-1,$$

得 $y=\int p\mathrm{d}x=\int(C_1\mathrm{e}^x-x-1)\mathrm{d}x=C_1\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2$.

(6) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，代入原方程得

$$x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+p=0,\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},\quad \ln p=-\ln x+\ln C_1,p=\frac{C_1}{x},\quad y=\int\frac{C_1}{x}\mathrm{d}x=C_1\ln|x|+C_2.$$

(7) 令 $y'=p$，则 $y''=p'=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程有

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+2p^2=0,\quad \frac{\mathrm{d}p}{p}=-2\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

积分得 $\ln|p|=\ln\frac{1}{y^2}+\ln C'$，即 $y'=p=\frac{C'}{y^2}$，再分离变量积分得 $y^2\mathrm{d}y=C'\mathrm{d}x$，

$$y^3=3C'x+C_2,$$

即方程的通解为 $y^3=C_1x+C_2$.

(8) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，由 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p'}{p}$，得 $p'=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程有

$$y^3p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-1=0,p\mathrm{d}p=\frac{1}{y^3}\mathrm{d}y,$$

积分得 $p^2=-\frac{1}{y^2}+C_1,p=\pm\sqrt{-\frac{1}{y^2}+C_1}$，即 $y'=\pm\sqrt{-\frac{1}{y^2}+C_1}$. 所以 $C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2$.

(9) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，由 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p'}{p}$，得 $p'=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程有

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\sqrt{y}}, p\mathrm{d}p=\frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y,$$

积分得 $p^2=4\sqrt{y}+4C_1$，所以 $x+C_2=\pm\left[\frac{2}{3}(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}}-2C_1\sqrt{\sqrt{y}+C_1}\right]$.

(10) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，由 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p'}{p}$，得 $p'=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程有

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^3+p, \frac{1}{1+p^2}\mathrm{d}p=\mathrm{d}y,$$

积分得 $p=\tan(y+C_1)$，所以 $y=\arcsin(C_2\mathrm{e}^x)-C_1$.

2. 求下列各微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $y^3y''+1=0, y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=0$；

(2) $y''-ay'^2=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-1$；

(3) $y'''=\mathrm{e}^{ax}, y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0$；

(4) $y''=\mathrm{e}^{2y}, y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$；

(5) $y''=3\sqrt{y}, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$；

(6) $y''+(y')^2=1, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0$.

解 (1) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，由 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p'}{p}$，得 $p'=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程得

$$y^3p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+1=0, p\mathrm{d}p=-y^{-3}\mathrm{d}y,$$

解得 $p^2=y^{-2}+C_1$，由 $y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=0$ 知 $C_1=-1$.

由 $y'^2=y^{-2}-1$，解得 $-\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$，由 $y|_{x=1}=1$ 得 $C_2=\mp 1$. 故有 $x^2+y^2=2x$.

(2) 令 $y'=p$，原方程成为 $p'=ap^2$，分离变量有 $\frac{1}{p^2}\mathrm{d}p=a\mathrm{d}x$，得到 $-\frac{1}{p}=ax+C_1$.

由 $y'|_{x=0}=-1$，有 $C_1=1$. 所以 $y'=-\frac{1}{ax+1}$，积分得 $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2$.

由 $y|_{x=0}=0$，得 $C_2=0$，所以 $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$.

(3) 积分得到 $y''=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}+C_1$，由 $y''|_{x=1}=0$，有 $C_1=-\frac{1}{a}\mathrm{e}^a$.

第二次积分得到 $y'=\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{a}\mathrm{e}^a x+C_2$，由 $y'|_{x=1}=0$，有 $C_2=\frac{1}{a}\mathrm{e}^a-\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^a$.

第三次积分得到 $y=\frac{1}{a^3}\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{2a}\mathrm{e}^a x^2+\frac{1}{a}\mathrm{e}^a x-\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^a x+C_3$，由 $y|_{x=1}=0$，有

$$C_3=\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^a-\frac{1}{2a}\mathrm{e}^a-\frac{1}{a^3}\mathrm{e}^a,$$

所以 $y=\frac{1}{a^3}\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{2a}\mathrm{e}^a x^2+\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^a(a-1)x+\frac{1}{2a^3}\mathrm{e}^a(2a-a^2-2)$.

(4) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，由 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p'}{p}$，得 $p'=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\mathrm{e}^{2y}, p\mathrm{d}p=\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y,$$

积分得 $p^2=\mathrm{e}^{2y}+C_1$，由 $y\big|_{x=0}=y'\big|_{x=0}=0$，有 $C_1=-1$.

由 $y'^2=\mathrm{e}^{2y}-1$，得 $\arcsin(\mathrm{e}^{-y})=\pm x+C_2$，由 $y\big|_{x=0}=0$，有 $C_2=\frac{\pi}{2}$，故 $y=\ln(\sec x)$.

(5) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，由 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p'}{p}$，得 $p'=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=3\sqrt{y}, p\mathrm{d}p=3\sqrt{y}\mathrm{d}y,$$

积分得 $\frac{1}{2}p^2=2y^{\frac{3}{2}}+C_1$，由 $y'\big|_{x=0}=2$，有 $C_1=0$. 故 $y'=p=\pm 2y^{\frac{3}{4}}$，又 $y''=3\sqrt{y}>0$，得 $y'=2y^{\frac{3}{4}}$，积分得 $4y^{\frac{1}{4}}=2x+C_2$，由 $y\big|_{x=0}=1$，有 $C_2=4$，故 $y=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4$.

(6) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，由 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p'}{p}$，得 $p'=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=1, \frac{p}{1-p^2}\mathrm{d}p=\mathrm{d}y,$$

积分得 $\frac{1}{2}\ln(p^2-1)=-y+C, p^2-1=C_1\mathrm{e}^{-2y}$，由 $y'\big|_{x=0}=0$，有 $C_1=-1$. 所以 $p^2=1-\mathrm{e}^{-2y}$，由此得到

$$\pm x+C_2=\ln(\mathrm{e}^y+\sqrt{\mathrm{e}^{2y}-1}),$$

由 $y\big|_{x=0}=0$，得 $C_2=0$，故有 $\mathrm{e}^y=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，即 $y=\ln\operatorname{ch}x$.

3. 试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 相切的积分曲线.

解 由问题的条件，得到方程的初始条件为 $y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$.

所以积分得 $y'=\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+C_1$，代入 $y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$，得 $C_1=\frac{1}{2}$，即得 $y'=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$，再积分得

$$y=\int\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+C_2,$$

代入 $y\big|_{x=0}=0$，得 $C_2=1$，所求积分曲线为

$$y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+1.$$

4. 设有一质量为 m 的物体，在空中由静止开始下落，如果空气阻力为 $R=cv$（其中 c 为常数，v 为物体运动的速度）. 试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系.

解 根据牛顿第二定律，物体下落运动满足的微分方程初始问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g-\dfrac{c}{m}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\\ s\big|_{t=0}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

因 $\dfrac{ds}{dt}=v$，方程化为 $\dfrac{dv}{dt}=g-\dfrac{c}{m}v$，分离变量后积分得

$$\int\frac{dv}{g-\frac{c}{m}v}=\int dt,$$

得 $\ln|g-\dfrac{c}{m}v|=-\dfrac{c}{m}t+C_1$，代入初始条件 $v\big|_{t=0}=\dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=0$，得 $C_1=\ln g$．于是有

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{mg}{c}(1-e^{-\frac{c}{m}t});$$

积分得 $s=\dfrac{mg}{c}\left(t+\dfrac{m}{c}e^{-\frac{c}{m}t}\right)+C_2$，代入初始条件 $s\big|_{t=0}=0$，得 $C_2=-\dfrac{m^2g}{c^2}$．故所求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系为 $s=\dfrac{mg}{c}\left(t+\dfrac{m}{c}e^{-\frac{c}{m}t}\right)-\dfrac{m^2g}{c^2}$.

习题 7-6

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的?

(1) x,x^2;

(2) $x,2x$;

(3) $e^{2x},3e^{2x}$;

(4) e^{-x},e^x;

(5) $\cos 2x,\sin 2x$;

(6) e^{x^2},xe^{x^2};

(7) $\sin 2x,\cos x\sin x$;

(8) $e^x\cos 2x,e^x\sin 2x$

(9) $\ln x,x\ln x$;

(10) $e^{ax},e^{bx}(a\neq b)$.

答 (1) 由 $\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}\neq k$（常数），故 x,x^2 线性无关.

(2) 由 $\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$，故 $x,2x$ 线性相关.

(3) 由 $\dfrac{e^{2x}}{3e^{2x}}=\dfrac{1}{3}$，故 $e^{2x},3e^{2x}$ 线性相关.

(4) 由 $\dfrac{e^{-x}}{e^x}=e^{-2x}\neq k$，故 e^{-x},e^x 线性无关.

(5) 由 $\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}=\cot 2x\neq k$，故 $\cos 2x,\sin 2x$ 线性无关.

(6) 由 $\dfrac{e^{x^2}}{xe^{x^2}}=\dfrac{1}{x}\neq k$，故 e^{x^2},xe^{x^2} 线性无关.

(7) 由 $\dfrac{\sin 2x}{\cos\sin x}=\dfrac{2\sin x\cos x}{\cos\sin x}=2$，故 $\sin 2x,\cos x\sin x$ 线性相关.

(8) 由 $\dfrac{e^x\cos 2x}{e^x\sin 2x}=\cot 2x\neq k$，故 $e^x\cos 2x,e^x\sin 2x$ 线性无关.

(9) 由 $\dfrac{\ln x}{x\ln x}=\dfrac{1}{x}\neq k$，故 $\ln x,x\ln x$ 线性无关.

(10) 由 $\dfrac{e^{ax}}{e^{bx}}=e^{(a-b)x}(a-b\neq 0)$，故 $e^{ax},e^{bx}(a\neq b)$ 线性无关.

2. 验证 $y_1=\cos\omega x$ 及 $y_2=\sin\omega x$ 都是方程 $y''+\omega^2 y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

证明 将 $y_1=\cos\omega x$ 代入方程左端，得

$$y''+\omega^2 y=-\omega^2\cos\omega x+\omega^2\cos\omega x=0,$$

所以 y_1 是方程的解. 同理，将 $y_1=\cos\omega x$ 代入方程左端，得

$$y''+\omega^2 y=-\omega^2\sin\omega x+\omega^2\sin\omega x=0,$$

所以 y_2 也是方程的解. 又

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{\sin\omega x}{\cos\omega x}=\tan\omega x\neq k\ （常数）,$$

所以 y_1 与 y_2 线性无关，故该方程的通解为 $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$.

3. 验证 $y_1=\mathrm{e}^{x^2}$ 及 $y_2=x\mathrm{e}^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy+(4x^2-2)y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

证明 $y_1'=2x\mathrm{e}^{x^2}$，$y_1''=4x^2\mathrm{e}^{x^2}+2\mathrm{e}^{x^2}$，代入方程左端，得

$$y''-4xy+(4x^2-2)y=4x^2\mathrm{e}^{x^2}+2\mathrm{e}^{x^2}-4x\cdot 2x\mathrm{e}^{x^2}+(4x^2-2)\mathrm{e}^{x^2}=0,$$

所以 y_1 是方程的解. 又

$$y_2'=2x^2\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{x^2},\quad y_2''=4x\mathrm{e}^{x^2}+4x^3\mathrm{e}^{x^2}+2x\mathrm{e}^{x^2},$$

代入方程左端，得

$$y''-4xy+(4x^2-2)y=\mathrm{e}^{x^2}(4x^3+6x)-4x(2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2}+(4x^2-2)x\mathrm{e}^{x^2}=0,$$

所以 y_2 也是方程的解. 又

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x\mathrm{e}^{x^2}}=\frac{1}{x}\neq k\ （常数）,$$

所以 y_1 与 y_2 线性无关，故该方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{x^2}+C_2x\mathrm{e}^{x^2}=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{x^2}$.

4. 验证:

(1) $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}$（$C_1,C_2$ 是任意常数）是方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{5x}$ 的通解.

(2) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\dfrac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$（$C_1,C_2$ 是任意常数）是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的通解.

(3) $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$（C_1,C_2 是任意常数）是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的通解.

(4) $y=C_1x^5+\dfrac{C_2}{x}-\dfrac{x^2}{9}\ln x$（$C_1,C_2$ 是任意常数）是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的通解.

(5) $y=\dfrac{1}{x}(C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x})+\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$（$C_1,C_2$ 是任意常数）是方程 $xy''+2y'-xy=\mathrm{e}^x$ 的通解.

(6) $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2$（$C_1,C_2,C_3,C_4$ 是任意常数）是方程 $y^{(4)}-y=x^2$ 的通解.

证明 (1) 对应的齐次线性方程为 $y''-3y'+2y=0$，将 $y_1=\mathrm{e}^x$ 代入齐次方程的左端，得

$$y''-3y'+2y=e^x-3e^x+2e^x=0,$$

所以 y_1 是齐次方程的解. 将 $y_2=e^{2x}$ 代入齐次方程的左端, 得

$$y''-3y'+2y=4e^{2x}-6e^{2x}+2e^{2x}=0,$$

所以 y_2 是齐次方程的解. 又

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{e^{2x}}{e^x}=e^x\neq k\ （常数）,$$

所以 y_1 与 y_2 线性无关, 从而齐次线性方程的通解为

$$\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{x^2}.$$

再将 $y^*=\frac{1}{12}e^{5x}, y^{*\prime}=\frac{5}{12}e^{5x}, y^{*\prime\prime}=\frac{25}{12}e^{5x}$ 代入题设方程左端, 得

$$y''-3y'+2y=\frac{25}{12}e^{5x}-\frac{15}{12}e^{5x}+2\cdot\frac{1}{12}e^{5x}=e^{5x},$$

所以 y^* 是题设非齐线性次方程的特解, 由通解的结构定理知

$$y=\overline{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$$

是题设方程的通解.

(2) 与上题类似, 先验证 $y_1=\cos 3x, y_2=\sin 3x$ 是对应的齐次线性方程 $y''+9y=0$ 的两个线性无关的解. 事实上,

$$(\cos 3x)''+9\cos 3x=-9\cos 3x+9\cos 3x=0,$$
$$(\sin 3x)''+9\sin 3x=-9\sin 3x+9\sin 3x=0,$$

所以 y_1 与 y_2 都是齐次线性方程的解, 又

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=\tan 3x\neq k\ （常数）,$$

所以 y_1 与 y_2 线性无关, 从而齐次线性方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

再证 $y^*=\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$ 是题设非齐次线性方程的特解. 事实上,

$$y^{*\prime}=\frac{1}{32}(4\cos x-4x\sin x+\cos x)=\frac{1}{32}(5\cos x-4x\sin x),$$
$$y^{*\prime\prime}=\frac{1}{32}(-5\sin x-4\sin x-4x\cos x)=\frac{1}{32}(-9\sin x-4x\cos x),$$

将 $y^*, y^{*\prime\prime}$ 代入方程左端, 得

$$y^{*\prime\prime}+9y^*=\frac{1}{32}(-9\sin x-4x\cos x)+\frac{9}{32}(4x\cos x+\sin x)=x\cos x,$$

所以 y^* 是题设方程的特解, 从而该方程的通解为

$$y=\overline{y}+y^*=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x).$$

(3) 记 $y_1=x^2, y_2=x^2\ln x$，则

$$y_1'=2x, y_1''=2,$$

代入方程左端，得 $2x^2-3x\cdot 2x+4x^2=0$，所以 y_1 是该方程的解；又因

$$y_2=x^2\ln x,$$

$$y_2'=2x\ln x+x, y_2''=2\ln x+3,$$

代入方程左端，得

$$x^2(2\ln x+3)-3x^2(2\ln x+1)+4x^2\ln x=0,$$

所以 y_2 也是该方程的解，又因

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{x^2\ln x}{x^2}=\ln x\neq k \text{（常数）},$$

故 y_1 与 y_2 线性无关，从而该方程的通解为 $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$.

(4) 记 $y_1=x^5$，则 $y_1'=5x^4, y_1''=20x^3$，代入对应的齐次线性方程左端，得

$$20x^5-15x^5-5x^5=0,$$

所以 y_1 是对应的齐次线性方程的解；同理可证，$y_2=\dfrac{1}{x}$ 也是对应齐次线性方程的解. 又

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{x^5}{1/x}=x^6\neq k \text{（常数）},$$

故 y_1 与 y_2 线性无关. 再将 $y^*=-\dfrac{x^2}{9}\ln x, y^{*\prime}=-\dfrac{2}{9}x\ln x-\dfrac{1}{9}x$，$y^{*\prime\prime}=-\dfrac{2}{9}\ln x-\dfrac{2}{9}-\dfrac{1}{9}=-\dfrac{2}{9}\ln x-\dfrac{1}{3}$，代入题设方程左端，得

$$-x^2\left(\frac{2}{9}\ln x+\frac{1}{3}\right)+3x^2\left(\frac{2}{9}\ln x+\frac{1}{9}\right)+\frac{5}{9}x^2\ln x=x^2\ln x,$$

所以 y^* 是题设方程的特解，故该方程的通解是 $y=C_1x^5+\dfrac{C_2}{x}-\dfrac{x^2}{9}\ln x$.

(5) 将 $y_1=\dfrac{e^x}{x}, y_1'=\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^x}{x^2}$，$y_1''=\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{e^x}{x^2}+2\cdot\dfrac{e^x}{x^3}=\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{2e^x}{x^2}+\dfrac{2e^x}{x^3}$ 代入题设方程的左端，得

$$e^x\left[\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)+\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-1\right]=0\cdot e^x=0,$$

所以 y_1 是对应齐次线性方程的解；同理可证，$y_2=e^{-x}/x$ 也是对应齐次线性方程的解. 又

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{e^x/x}{e^{-x}/x}=e^{2x}\neq k \text{（常数）},$$

故 y_1 与 y_2 线性无关，再以 $y^*=\dfrac{e^x}{2}$ 代入题设方程左端，

$$x\cdot\frac{e^x}{2}+2\cdot\frac{e^x}{2}-x\cdot\frac{e^x}{2}=e^x.$$

所以 y^* 是题设方程的特解，故其通解为 $y=\dfrac{1}{x}(C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x})+\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.

(6) 记 $y_1=\mathrm{e}^x, y_2=\mathrm{e}^{-x}, y_3=\cos x, y_4=\sin x$，分别将它们代入齐次线性方程的左端，知它们均满足齐次线性方程 $y^{(4)}-y=0$，且 y_1,y_2,y_3,y_4 线性无关，又 $y^*=-x^2$ 满足 $y^{(4)}-y=x^2$，所以 y^* 是题设方程的特解，故其通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2.$$

***5.** 已知 $y_1(x)=\mathrm{e}^x$ 是齐次线性方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的一个解，求此方程的通解.

解 设 $y_2(x)=y_1(x)u(x)=\mathrm{e}^x u(x)$ 为方程的一个与 $y_1(x)=\mathrm{e}^x$ 线性无关的解，则

$$y_2'=\mathrm{e}^x[u(x)+u'(x)],$$
$$y_2''=\mathrm{e}^x[u(x)+2u'(x)+u''(x)],$$

代入原方程，得到

$$(2x-1)u''(x)+(2x-3)u'(x)=0,$$

令 $p=u'(x)$，则 $p'=u''(x)$，得

$$(2x-1)p'+(2x-3)p=0, \frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{2x-3}{2x-1}\mathrm{d}x,$$

求解得 $p=C_1(2x-1)\mathrm{e}^{-x}$，积分得

$$u(x)=-C_1[(2x-1)\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{-x}]+C_2.$$

因 $y_2(x)=\mathrm{e}^x u(x)=-C_1(2x+1)+C_2\mathrm{e}^x$，令 $C_1=-1, C_2=0$，则 $y_2=2x+1$ 是原方程的一个特解，且与 $y_1(x)=\mathrm{e}^x$ 线性无关，故该方程的通解为 $y=C_3(2x+1)+C_4\mathrm{e}^x$.

***6.** 已知 $y_1(x)=x$ 是齐次线性方程 $x^2y''-2xy'+2y=0$ 的一个解，求非齐次线性方程 $x^2y''-2xy'+2y=2x^3$ 的通解.

解 设 $y_2(x)=y_1(x)u(x)=xu(x)$ 为方程的一个与 $y_1(x)=x$ 线性无关的解，则

$$y_2'=u(x)+xu'(x),$$
$$y_2''=2u'(x)+xu''(x),$$

代入原方程，得到

$$x^2[2u'(x)+xu''(x)]-2x[u(x)+xu'(x)]+2xu(x)=0,$$

即得 $u''(x)=0$，积分得 $u(x)=Cx-C^*$，取 $u(x)=x$，则 $y_2(x)=x^2$，故齐次线性方程的通解为

$$Y(x)=C_1x+C_2x^2.$$

将 $x^2y''-2xy'+2y=2x^3$ 化为 $y''-\dfrac{2}{x}y'+\dfrac{2y}{x^2}=2x$，由常数变易法得到的非齐次线性方程的通解公式，得

$$y=C_1x+C_2x^2-x\int\frac{x^2f}{w}\mathrm{d}x+x^2\int\frac{xf}{w}\mathrm{d}x,$$

其中 $f=2x, w=y_1y_2'-y_2y_1'=x^2$，所以 $y=C_1x+C_2x^2+x^3$.

***7.** 已知齐次线性方程 $y''+y=0$ 的通解为 $Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$，求非齐次线性方程 $y''+y=\sec x$ 的通解.

解 易知 $y_1=\cos x, y_2=\sin x$ 是 $y''+y=0$ 的两个线性无关的解，$w=y_1y_2'-y_2y_1'=1$，$f(x)=\sec x$，由上题得 $y''+y=\sec x$ 的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x.$$

***8.** 已知齐次线性方程 $x^2y''-xy'+y=0$ 的通解为 $Y(x)=C_1x+C_2x\ln|x|$，求非齐次线性方程 $x^2y''-xy'+y=x$ 的通解.

解 易知 $y_1=x, y_2=x\ln|x|$ 是 $x^2y''-xy'+y=0$ 的两个线性无关的解，将 $x^2y''-xy'+y=x$ 化为 $y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=\frac{1}{x}$，则有 $f(x)=\frac{1}{x}, w=y_1y_2'-y_2y_1'=x$，故 $x^2y''-xy'+y=x$ 的通解为

$$y=C_1x+C_2x\ln|x|+\frac{x}{2}(\ln|x|)^2.$$

习题 7-7

1. 求下列微分方程的解.

(1) $y''+y'-2y=0$;　　(2) $y''-4y'=0$;

(3) $y''+y=0$;　　(4) $y''+6y'+13y=0$;

(5) $4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$;　　(6) $y''-4y'+5y=0$

(7) $y^{(4)}-y=0$;　　(8) $y^{(4)}+2y''+y=0$;

(9) $y^{(4)}-2y'''+y''=0$;　　(10) $y^{(4)}+5y''-36y=0$.

解 (1) 由于特征方程为 $r^2+r-2=0$，即 $(r+2)(r-1)=0$，所以特征根为 $r_1=1, r_2=-2$，故方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

(2) 由于特征方程为 $r^2-4r=0$，即 $r(r-4)=0$，所以特征根为 $r_1=0, r_2=4$，故方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}.$$

(3) 由于特征方程为 $r^2+1=0$，所以特征根为 $r=\pm i$，$\alpha=0, \beta=1$，故方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

(4) 由于特征方程为 $r^2+6r+13=0$，所以特征根为 $r_{1,2}=-3\pm 2i$，故方程的通解为

$$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

(5) 由于特征方程为 $4r^2-20r+25=0$，即 $(2r-5)^2=0$，所以特征根为 $r_{1,2}=\frac{5}{2}$，故方程的通解为

$$y=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}.$$

(6) 由于特征方程为 $r^2-4r+5=0$，即 $(r-2)^2=-1$，所以特征根为 $r_{1,2}=2\pm i$，故方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

(7) 由于特征方程为 $r^4-1=0$，即 $(r^2-1)(r^2+1)=0$，所以特征根为 $r_{1,2}=\pm1, r_{3,4}=\pm\mathrm{i}$，故方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

(8) 由于特征方程为 $r^4+2r^2+1=0$，即 $(r^2+1)^2=0$，所以特征根为 $r_{1,2}=\mathrm{i}, r_{3,4}=-\mathrm{i}$，故方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

(9) 由于特征方程为 $r^4-2r^3+r^2=0$，即 $r^2(r-1)^2=0$，所以特征根为 $r_{1,2}=0, r_{3,4}=1$，故方程的通解为

$$y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)\mathrm{e}^x.$$

(10) 由于特征方程为 $r^4+5r^2-36=0$，即 $(r^2+9)(r^2-4)=0$，所以特征根为 $r_{1,2}=\pm 2, r_{3,4}=\pm 3\mathrm{i}$，故方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $y''-4y'+3y=0, y|_{x=0}=6, y'|_{x=0}=10$；

(2) $4y''+4y'+y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$；

(3) $y''-3y'-4y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-5$；

(4) $y''+4y'+29y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=15$；

(5) $y''+25y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=5$；

(6) $y''-4y'+13y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=3$.

解 (1) 特征方程为 $r^2-4r+3=0$，特征根为 $r_1=1, r_2=3$，故方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x},$$

得 $y'=C_1\mathrm{e}^x+3C_2\mathrm{e}^{3x}$，将 $y|_{x=0}=6, y'|_{x=0}=10$ 代入，有

$$\begin{cases}C_1+C_2=6,\\C_1+3C_2=10,\end{cases}$$

得 $C_1=4, C_2=2$，所以特解为 $y=4\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{3x}$.

(2) 特征方程为 $4r^2+4r+1=0$，即 $(2r+1)^2=0$，特征根为 $r_{1,2}=-\dfrac{1}{2}$，故方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x},$$

得 $y'=\left(-\dfrac{1}{2}C_1+C_2-\dfrac{1}{2}C_2x\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$，将 $y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$ 代入，有

$$\begin{cases}C_1=2,\\-\dfrac{1}{2}C_1+C_2=0,\end{cases}$$

得 $C_1=2, C_2=1$，所以特解为 $y=(2+x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

(3) 特征方程为 $r^2-3r-4=0$，即 $(r+1)(r-4)=0$，特征根为 $r_1=-1, r_2=4$，故方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{4x},$$

得 $y'=-C_1\mathrm{e}^{-x}+4C_2\mathrm{e}^{4x}$，将 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-5$ 代入，有

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\-C_1+4C_2=-5,\end{cases}$$

得 $C_1=1, C_2=-1$，所以特解为 $y=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{4x}$.

(4) 特征方程为 $r^2+4r+29=0$，特征根为 $r_{1,2}=-2\pm5\mathrm{i}$，故方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos5x+C_2\sin5x),$$

得 $y'=\mathrm{e}^{-2x}[(5C_2-2C_1)\cos5x-(5C_1+2C_2)\sin5x]$，将 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=15$ 代入，有

$$\begin{cases}C_1=0,\\5C_2-2C_1=15,\end{cases}$$

得 $C_1=0, C_2=3$，所以特解为 $y=3\mathrm{e}^{-2x}\sin5x$.

(5) 特征方程为 $r^2+25=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm5\mathrm{i}$，故方程的通解为

$$y=C_1\cos5x+C_2\sin5x,$$

得 $y'=-5C_1\sin5x+5C_2\cos5x$，将 $y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=5$ 代入，有

$$\begin{cases}C_1=2,\\C_2=1,\end{cases}$$

所以特解为 $y=2\cos5x+\sin5x$.

(6) 特征方程为 $r^2-4r+13=0$，得特征根为 $r_{1,2}=2\pm3\mathrm{i}$，故方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{2x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x),$$

得 $y'=\mathrm{e}^{2x}[(2C_1+3C_2)\cos3x+(2C_2-3C_1)\sin3x]$，将 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=3$ 代入，有

$$\begin{cases}C_1=0,\\C_2=1,\end{cases}$$

所以特解为 $y=\mathrm{e}^{2x}\sin3x$.

3. 一个单位质量的质点在数轴上运动，开始时质点在原点 O 处且速度为 v_0，在运动过程中，它受到一个力的作用，这个力的大小与质点到原点的距离成正比（比例系数 $k_1>0$）而方向与初速度一致. 又介质的阻力与速度成正比（比例系数 $k_2>0$），求反映该质点的运动规律的函数.

解 设质点的位移函数为 $x=x(t)$，质量 $m=1$，依照题意，质点的位移函数满足的微分方程的初值问题为

$$\begin{cases}x''=k_1x-k_2x',\\x|_{t=0}=0, x'|_{t=0}=v_0,\end{cases}$$

微分方程对应的特征方程为 $r^2+k_2r-k_1=0$，知

$$r_{1,2}=\frac{-k_2\pm\sqrt{k_2{}^2+4k_1}}{2},$$

微分方程的通解为

$$x=C_1\mathrm{e}^{\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}+C_2\mathrm{e}^{\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t},$$

得

$$x'=\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}C_1\mathrm{e}^{\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}+\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}C_2\mathrm{e}^{\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}.$$

代入 $x|_{t=0}=0, x'|_{t=0}=v_0$，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ \dfrac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}C_1-\dfrac{k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}C_2=v_0,\end{cases}$$

解得 $C_1=\dfrac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}, C_2=-\dfrac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}$，故所求质点的运动规律为

$$x=\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}\left(\mathrm{e}^{\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}-\mathrm{e}^{\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}\right)=\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}\mathrm{e}^{\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}\left(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{k_2^2+4k_1}t}\right).$$

4. 在图 7-2 所示的电路中先将开关 S 拨向 A, 达到稳定状态后再将开关 S 拨向 B, 求电压 $u_C(t)$ 及电流 $i(t)$，已知 $E=20\mathrm{V}, C=0.5\times10^{-6}\mathrm{F}, L=0.1\mathrm{H}, R=2000\Omega$.

解 由回路定律, 得

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+\frac{q}{C}=0,$$

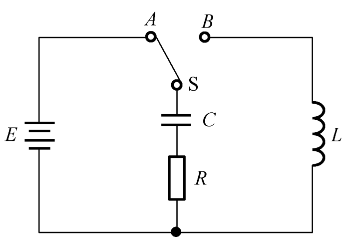


图 7-2

因 $\dfrac{q}{C}=u_C$, 即 $q=Cu_C, i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=C\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$，于是 $u_C(t)$ 满足的初始问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{LC}u_C=0,\\ u_C|_{t=0}=E, \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}|_{t=0}=0,\end{cases}$$

已知 $\dfrac{R}{L}=\dfrac{2000}{0.1}=2\times10^4, \dfrac{1}{LC}=\dfrac{1}{0.1\times0.5\times10^{-6}}=2\times10^7$，代入微分方程, 得

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+2\times10^4\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+2\times10^7u_C=0,$$

其特征方程为 $r^2+2\times10^4r+2\times10^7=0$，解得 $r_1\approx-1.9\times10^4, r_2\approx-10^3$，故

$$u_C=C_1\mathrm{e}^{-1.9\times10^4t}+C_2\mathrm{e}^{-10^3t},$$

而 $u_C'=-1.9\times10^4C_1\mathrm{e}^t-10^3C_2\mathrm{e}^t$，代入初始条件, 有

$$\begin{cases}C_1+C_2=20,\\ -1.9\times10^4C_1-10^3C_2=0\end{cases},$$

得 $C_1=-\dfrac{10}{9}, C_2=\dfrac{190}{9}$，所以

$$u_C=\frac{10}{9}(19\mathrm{e}^{-10^3t}-\mathrm{e}^{-1.9\times10^4t})\ (\mathrm{V}),$$

$$i=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{19}{18}\times10^{-2}(\mathrm{e}^{-1.9\times10^4t}-\mathrm{e}^{-10^3t})\ (\mathrm{A}).$$

5. 设圆柱形浮筒, 直径为 0.5m, 铅直放在水中, 当稍向下压后突然放开浮筒在水中上下振动的周期为 2s, 求浮筒的质量.

解 设浮筒的下底面中心为原点, x 轴向下, 振动时下底面中心的位移为 x; 再设 D 为浮筒直径, S 为底面积, m 为质量, ρ 为水的密度. 由牛顿第二定律, 有

$$f=ma=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\rho gS\cdot x$$

式中，负号表示位移 x 与回复力 f 反向.

特征方程为 $mr^2+\rho gS=0$，知 $r_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}i$，则有

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}t=A\sin\left(\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}t+\varphi\right)=A\sin(\omega t+\varphi),$$

其中
$$\omega=\sqrt{\frac{\rho gS}{m}},A=\sqrt{C_1{}^2+C_2{}^2},\sin\varphi=\frac{C_1}{A}.$$

代入题设周期 $T=2=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}$，得

$$m=\frac{\rho gS}{\pi^2},$$

将 $\rho=1000\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3,g=9.8\mathrm{m}/\mathrm{s}^2,D=0.5\mathrm{m},S=\pi D^2/4$ 代入, 得

$$m=\frac{\rho gD^2}{4\pi}=\frac{1000\times9.8\times0.5^2}{4\pi}\approx195\ (\mathrm{kg}).$$

习题 7-8

1. 求下列各微分方程的通解.

(1) $2y''+y'-y=2\mathrm{e}^x$;　(2) $y''+a^2y=\mathrm{e}^x$;

(3) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$;　(4) $y''+3y'+2y=3x\mathrm{e}^{-x}$;

(5) $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^x\sin2x$;　(6) $y''-6y'+9y=(x+1)\mathrm{e}^{3x}$;

(7) $y''+5y'+4y=3-2x$;　(8) $y''+4y=x\cos x$;

(9) $y''+y=\mathrm{e}^x+\cos x$;　(10) $y''-y=\sin^2x$.

解 (1) 特征方程为 $2r^2+r-1=0$，即 $(2r-1)(r+1)=0$，得特征根为 $r_1=-1,r_2=\frac{1}{2}$，所以齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

自由项 $f(x)=2\mathrm{e}^x$，属于 $P(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型, 这里 $P(x)=2$（常数）, 是零次多项式, 其同次多项式 $Q(x)$ 也是常数, 设 $Q(x)=a$；这里 $\lambda=1$ 不是特征根, 在 x^k 中取 $k=0$，于是设特解 $y^*=x^0\mathrm{e}^x\cdot a=a\mathrm{e}^x$，则 $y^{*\prime}=a\mathrm{e}^x,y^{*\prime\prime}=a\mathrm{e}^x$，代入原方程, 得

$$2a\mathrm{e}^x + a\mathrm{e}^x - a\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x,$$

知 $a=1$，所以 $y^* = \mathrm{e}^x$，方程的通解为 $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + \mathrm{e}^x$.

(2) 特征方程为 $r^2 + a^2 = 0$，得特征根为 $r_{1,2} = \pm a\mathrm{i}$ （不妨设 $a > 0$ ），所以齐次方程的通解为

$$\overline{y} = C_1\cos ax + C_2\sin ax.$$

这里 $\lambda = 1$ 不是特征根，取 $k=0$，$P_0(x)=1$ （常数），故设方程的特解为 $y^* = x^0\mathrm{e}^x\cdot b = b\mathrm{e}^x$，则 $y^{*\prime} = b\mathrm{e}^x, y^{*\prime\prime} = b\mathrm{e}^x$，代入原方程，得

$$b\mathrm{e}^x + a^2b\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x,$$

知 $b = \dfrac{1}{1+a^2}$，所以 $y^* = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+a^2}$，方程的通解为

$$y = C_1\cos ax + C_2\sin ax + \frac{\mathrm{e}^x}{1+a^2}.$$

(3) 特征方程 $2r^2 + 5r = 0$，得 $r_1 = 0, r_2 = -\dfrac{5}{2}$，所以齐次方程的通解为

$$\overline{y} = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}.$$

这里原方程右边为多项式 $P_m(x)(m=2)$，可视为 $\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$ 中 $\lambda=0$ 之特例，这里 $\lambda = 0$ 是特征方程的单根，因此所设特解 $x^k\mathrm{e}^{\lambda x}Q_2(x)$ 中，应取 $k=1, Q_2(x) = ax^2 + bx + c$，于是

$$y^* = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx,$$

$$y^{*\prime} = 3ax^2 + 2bx + c, y^{*\prime} = 6ax + 2b,$$

代入原方程，得

$$2(6ax + 2b) + 5(3ax^2 + 2bx + c) = 5x^2 - 2x - 1,$$

即 $15ax^2 + (12a + 10b)x + (4b + 5c) = 5x^2 - 2x - 1$，比较系数，知 $a = \dfrac{1}{3}$，且

$$\begin{cases} 4 + 10b = -2, \\ 4b + 5c = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{3}{5}, \\ c = \dfrac{7}{25}, \end{cases}$$

所以 $y^* = x\left(\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{3}{5}x + \dfrac{7}{25}\right)$，方程的通解为

$$y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

(4) 特征方程 $r^2 + 3r + 2 = 0$，得 $r_1 = -1, r_2 = -2$，所以齐次方程的通解为

$$\overline{y} = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}.$$

这里 $\lambda = -1$ 是单根，$P_1(x) = 3x$，故设 $y^* = x\cdot(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$，则 $y^{*\prime} = [-ax^2 + (2a-b)x + b]\mathrm{e}^{-x}$，$y^{*\prime\prime} = [ax^2 + (b-4a)x + (2a-2b)]\mathrm{e}^{-x}$，代入题设方程，并比较系数，得

$$[ax^2 + (b-4a)x + (2a-2b)]\mathrm{e}^{-x} + 3[-ax^2 + (2a-b)x + b]\mathrm{e}^{-x} + 2x(ax+b)\mathrm{e}^{-x} = 3x\mathrm{e}^{-x},$$

所以

$$\begin{cases} b - 4a + 6a - 3b + 2b = 3, \\ 2a - 2b + 3b = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 3, \\ b + 2a = 0, \end{cases}$$

得 $a=\dfrac{3}{2},b=-3$，所以

$$y^*=x\left(\frac{3}{2}x-3\right)e^{-x},$$

方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+3x\left(\frac{1}{2}x-1\right)e^{-x}.$$

(5) 特征方程 $r^2-2r+5=0$，即 $(r-1)^2=-4,r_{1,2}=1\pm 2i$，得齐次方程的通解为

$$\overline{y}=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

这里 $\lambda\pm i\omega=1\pm 2i$ 是特征方程的单根，$P_0(x)=1$，故设特解

$$y^*=xe^x(a\cos 2x+b\sin 2x),$$

计算 $y^{*\prime},y^{*\prime\prime}$，并代入原方程比较系数，可得 $a=-\dfrac{1}{4},b=0$，所以 $y^*=-\dfrac{1}{4}xe^x\cos 2x$，方程的通解为

$$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x.$$

(6) 特征方程 $r^2-6r+9=0$，即 $(r-3)^2=0,r_{1,2}=3$，得齐次方程的通解为

$$\overline{y}=(C_1+C_2x)e^{3x}.$$

这里 $\lambda=3$ 是二重特征根，取 $k=2$；$P_1(x)=x+1$ 是一次多项式，故设方程的特解为

$$y^*=x^2e^{3x}(ax+b),$$

计算 $y^{*\prime},y^{*\prime\prime}$，代入原方程并比较系数，可得 $a=\dfrac{1}{6},b=\dfrac{1}{2}$，所以 $y^*=x^2e^{3x}\left(\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{2}\right)$，方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{x^2e^{3x}}{6}(x+3).$$

(7) 特征方程 $r^2+5r+4=0$，$r_1=-1,r_2=-4$，所以齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x},$$

这里 $e^{\lambda x}$ 中 $\lambda=0$ 不是特征根，取 $k=0$，设特解 $y^*=ax+b$，则 $y^{*\prime}=a,y^{*\prime\prime}=0$，代入方程有

$$5a+4ax+4b=3-2x,$$

比较系数，得 $4a=-2,5a+4b=3$，知 $a=-\dfrac{1}{2},b=\dfrac{11}{8}$，得 $y^*=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{8}$，方程的通解为

$$\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}.$$

(8) 特征方程 $r^2+4=0$，$r_{1,2}=\pm 2i$，所以齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

这里 $\omega i=i$ 不是特征方程的特征根，取 $k=0$，$P_1(x)=x$，故设特解为

$$y^*=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x,$$

计算 $y^{*\prime},y^{*\prime\prime}$，代入原方程，并比较系数，计算得 $a=\dfrac{1}{3},b=0,c=0,d=\dfrac{2}{9}$，所以

$$y^*=\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x,$$

原方程的通解为 $\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{3}x\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x$.

(9) 特征方程为 $r^2+1=0$，$r_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，所以齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

分别求 $y''+y'=\mathrm{e}^x$ 与 $y''+y'=\cos x$ 的特解 y_1^* 和 y_2^*. 易知 $y_1^*=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$；设方程 $y''+y'=\cos x$ 的特解为 $y_2^*=x(a\cos x+b\sin x)$，计算 $y_2^{*\prime},y_2^{*\prime\prime}$，代入方程并比较系数，计算得 $a=0,b=\dfrac{1}{2}$，所以 $y_2^*=\dfrac{1}{2}x\sin x$，得原方程的特解为 $y^*=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}x\sin x$，故原方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x\sin x.$$

(10) 特征方程为 $r^2-1=0$，$r_{1,2}=\pm 1$，所以齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

而 $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$. 已知 $y''-y=\dfrac{1}{2}$ 有特解 $y_1^*=-\dfrac{1}{2}$；又 $\omega\mathrm{i}=2\mathrm{i}$ 不是特征方程的根，故设方程 $y''-y=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ 的特解为 $y_2^*=a\cos 2x+b\sin 2x$，计算 $y_2^{*\prime},y_2^{*\prime\prime}$，代入并比较系数，计算得 $a=\dfrac{1}{10},b=0$，所以 $y_2^*=\dfrac{1}{10}\cos 2x$，得原方程的特解为 $y^*=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}\cos 2x$，原方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x.$$

2. 求下列各微分方程满足已给初始条件的特解.

(1) $y''+y+\sin 2x=0, y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=1$；

(2) $y''-3y'+2y=5, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$；

(3) $y''-10y'+9y=\mathrm{e}^{2x}, y|_{x=0}=\dfrac{6}{7}, y'|_{x=0}=\dfrac{33}{7}$；

(4) $y''-y=4x\mathrm{e}^x, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$；

(5) $y''-4y'=5, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$.

解 (1) 齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $r^2+1=0$，特征根 $r_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，所以齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

自由项 $f(x)=-\sin 2x,\omega\mathrm{i}=2\mathrm{i}$ 不是特征根，设特解为 $y^*=a\cos 2x+b\sin 2x$，计算 $y^{*\prime},y^{*\prime\prime}$，代入原方程并比较系数，计算得到 $a=0,b=\dfrac{1}{3}$，所以

$$y^*=\frac{1}{3}\sin 2x,$$

方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 2x$，而 $y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\dfrac{2}{3}\cos 2x$，再代入初始条件 $y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=1$ 中，得

$$\begin{cases}-C_1=1,\\ -C_2+\dfrac{2}{3}=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=-1,\\ C_2=-\dfrac{1}{3},\end{cases}$$

所求满足初始条件的特解为 $\tilde{y}=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$.

(2) 齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0,(r-1)(r-2)=0$ ，特征根 $r_1=1,r_2=2$ ，所以齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

易知原方程有特解 $y^*=\frac{5}{2}$，所以方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{5}{2}$，而 $y'=C_1\mathrm{e}^x+2C_2\mathrm{e}^{2x}$.

代入初始条件 $y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=2$，得

$$\begin{cases}C_1+C_2+\frac{5}{2}=1,\\ C_1+2C_2=2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=-5,\\ C_2=\frac{7}{2},\end{cases}$$

所求特解为 $\tilde{y}=-5\mathrm{e}^x+\frac{7}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{5}{2}$.

(3) 齐次方程的特征方程为 $r^2-10r+9=0,(r-1)(r-9)=0$ ，特征根 $r_1=1,r_2=9$，所以齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{9x}$.

$\lambda=2$ 不是特征根，设特解 $y^*=a\mathrm{e}^{2x}$，而 $y^{*\prime}=2a\mathrm{e}^{2x},y^{*\prime\prime}=4a\mathrm{e}^{2x}$，代入原方程，得

$$\mathrm{e}^{2x}(4a-20a+9a)=\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow a=-\frac{1}{7},$$

所以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{9x}-\frac{1}{7}\mathrm{e}^{2x},y'=C_1\mathrm{e}^x+9C_2\mathrm{e}^{9x}-\frac{2}{7}\mathrm{e}^{2x}$. 代入初值条件 $y|_{x=0}=\frac{6}{7},y'|_{x=0}=\frac{33}{7}$，得

$$\begin{cases}C_1+C_2-\frac{1}{7}=\frac{6}{7},\\ C_1+9C_2-\frac{2}{7}=\frac{33}{7},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\frac{1}{2},\\ C_2=\frac{1}{2},\end{cases}$$

所求满足初始条件的特解为 $\tilde{y}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{9x}-\frac{1}{7}\mathrm{e}^{2x}$.

(4) 齐次方程的特征方程为 $r^2-1=0$，特征根 $r_{1,2}=\pm1$，所以齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$.

$\lambda=1$ 是单根，设原方程的特解 $y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^x=(ax^2+bx)\mathrm{e}^x$，计算 $y^{*\prime},y^{*\prime\prime}$，代入原方程并比较系数，算得 $a=1,b=-1$，所以 $y^*=(x^2-x)\mathrm{e}^x$，原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+x(x-1)\mathrm{e}^x,$$

而 $y'=C_1\mathrm{e}^x-C_2\mathrm{e}^{-x}+(x^2+x-1)\mathrm{e}^x$，代入初始条件 $y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$ 中，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ C_1-C_2-1=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1,\\ C_2=-1,\end{cases}$$

所以所求满足初始条件的特解为 $\tilde{y}=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+x(x-1)\mathrm{e}^x$.

(5) 齐次方程的特征方程为 $r^2-4r=0$，特征根 $r_1=4,r_2=0$，所以齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{4x}+C_2.$$

易知原方程有特解 $y^*=-\frac{5}{4}x$，所以方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{4x}+C_2-\frac{5}{4}x$，而 $y'=4C_1\mathrm{e}^{4x}-\frac{5}{4}$，代入初始条件 $y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=0$ 中，得 $C_1=\frac{5}{16},C_2=\frac{11}{16}$，所以所求满足初始条件的特解为

$$\tilde{y}=\frac{5}{16}\mathrm{e}^{4x}+\frac{11}{16}-\frac{5}{4}x.$$

3. 大炮以仰角 α 、初速度 v_0 发射炮弹, 若不计空气阻力, 求弹道曲线.

解 取炮口为原点, 炮弹前进的水平方向为 x 轴, 垂直向上为 y 轴, 弹道运动的微分方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}^2 t} = -g \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

且满足初始条件

$$\begin{cases} y|_{t=0} = 0, y'|_{t=0} = v_0 \sin\alpha, \\ x|_{t=0} = 0, x'|_{t=0} = v_0 \cos\alpha. \end{cases}$$

可由上得弹道曲线为

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

4. 在 R,L,C 含源串联电路中, 电动势为 E 的电源对电容器 C 充电. 已知 $E = 20\mathrm{V}, C = 0.2\mu\mathrm{F}$, $L = 0.1\mathrm{H}$, $R = 1000\Omega$, 试求合上开关 S 后的电流 $i(t)$ 及电压 $u_C(t)$.

解 由回路定律知

$$u_C'' + \frac{R}{L} u_C' + \frac{u_C}{LC} = \frac{E}{LC} .$$

$t = 0$ 时, $u_C = 0, u_C' = 0$.

$$\frac{R}{L} = \frac{1000}{0.1} = 10^4, \frac{1}{LC} = 5\times 10^7, \frac{E}{LC} = 10^9,$$

所以微分方程为 $u_C'' + 10^4 u_C' + 5\times 10^7 u_C = 10^9$, 求解方程得通解为

$$u_C = \mathrm{e}^{-5\times 10^3 t} [C_1 \cos(5\times 10^3) t + C_2 \sin(5\times 10^3) t] + 20 ,$$

代入初始条件得

$$u_C(t) = 20 - 20\mathrm{e}^{-5\times 10^3 t} [\cos(5\times 10^3) t + \sin(5\times 10^3) t] \quad (\mathrm{V}),$$

$$i(t) = C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 4\times 10^{-2} \mathrm{e}^{-5\times 10^3 t} \sin(5\times 10^3) t \quad (\mathrm{A}).$$

5. 一链条悬挂在一钉子上, 起动时一端离开钉子 8m, 另一端离开钉子 12m, 分别在以下两种情况下求链条滑下来所需要的时间: (1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力; (2) 若摩擦力为 1m 长的链条的质量.

解 (1) 设在时刻 t 时, 链条上较长的一段垂下 S 米, 且设链条的密度为 ρ , 则向下拉链条下滑的作用力

$$F = [S - (20 - S)]\rho g = 2\rho g (S - 10) .$$

由牛顿第二定律有 $20\rho S'' = 2\rho g (S - 10)$, 即 $S'' - \dfrac{g}{10} S = -g$, 求解得通解为

$$S = C_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{10}} t} + C_2 \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{10}} t} + 10 ,$$

因初始条件为 $t = 0, S = 12, S' = 0$, 将 S 代入初始条件得 $C_1 = C_2 = 1$, 所以有

$$S=\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10,$$

取 $S=20$，得 $\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}=10$（即 $\mathrm{ch}\sqrt{\frac{g}{10}}t=5$），即得

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln(5+2\sqrt{6})\ (\mathrm{s}).$$

(2) 向下拉链条下滑的作用力

$$F=[S-(20-S)]\rho g-\rho g=2\rho g(S-10)-\rho g.$$

故有 $S''-\frac{g}{10}S=-1.05g$，求解得通解为

$$S=C_1\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10.5,$$

代入初始条件 $t=0,S=12,S'=0$，得 $C_1=C_2=\frac{3}{4}$，所以 $S=\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+\frac{3}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10.5$，取 $S=20$，得 $\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}=\frac{38}{3}$（即 $\mathrm{ch}\sqrt{\frac{g}{10}}t=\frac{19}{3}$），即得

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left(\frac{19}{3}+\frac{4\sqrt{22}}{3}\right)\ (\mathrm{s}).$$

6. 设函数 $\varphi(x)$ 连续，且满足 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x+\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t-x\int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t$，求 $\varphi(x)$.

解 由已知得 $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=1$，且

$$\varphi''(x)+\varphi'(x)=\mathrm{e}^x.$$

求解微分方程，得通解为 $\varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$. 将初始条件 $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=1$ 代入，得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$，所以

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+\mathrm{e}^x).$$

*习题 7-9

求下列欧拉方程的通解.

1. $x^2y''+xy'-y=0$；
2. $y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{2}{x}$；
3. $x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=0$；
4. $x^2y''-2xy'+2y=\ln^2x-2\ln x$；
5. $x^2y''+xy'-4y=x^3$；
6. $x^2y''-xy'+4y=x\sin(\ln x)$；
7. $x^2y''-3xy'+4y=x+x^2\ln x$；
8. $x^3y'''+2xy'-2y=x^2\ln x+3x$.

解 **1.** 令 $x=\mathrm{e}^t$，则 $xy'=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Dy$，$x^2y''=x^2\cdot\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=D(D-1)y$，

代入原方程，得

$$D(D-1)y+Dy-y=0,$$

即 $D^2y-y=0,\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-y=0$，特征方程与特征根分别为 $r^2-1=0,r_{1,2}=\pm1$，所以 $y(t)=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}$，将 $t=\ln x$ 代回，得 $y(x)=C_1x+\dfrac{C_2}{x}$.

2. 将方程左右两边乘以 x^2，可化为欧拉方程

$$x^2y''-xy'+y=2x.$$

令 $x=\mathrm{e}^t$，此欧拉方程化为

$$D(D-1)y-Dy+y=2\mathrm{e}^t,$$

即 $D^2y-2Dy+y=2\mathrm{e}^t$，特征方程和特征根分别为 $r^2-2r+1=0,r_{1,2}=1$，所以齐次方程的通解为

$$\overline{y}(t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t.$$

下面求非齐次方程的特解. 因为自由项 $f(t)=2\mathrm{e}^t$ 中 $\lambda=1$ 是二重特征根，故设特解为 $y^*=at^2\mathrm{e}^t$，则 $y^{*\prime}=a(t^2+2t)\mathrm{e}^t,y^{*\prime\prime}=a(t^2+4t+2)\mathrm{e}^t$，代入方程中，并比较系数，得 $a=1$，所以 $y^*=t^2\mathrm{e}^t$，从而

$$y(t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t+t^2\mathrm{e}^t,$$

所以 $y(x)=(C_1+C_2\ln|x|)x+x\ln^2|x|$.

3. 令 $x=\mathrm{e}^t$，有

$$D(D-1)(D-2)y+3D(D-1)y-2Dy+2y=0,$$

即 $D^3y-3Dy+2y=0$，特征方程为 $r^3-3r+2=0$，即 $(r-1)^2(r+2)=0$，$r_{1,2}=1,r_3=-2$，从而

$$y(t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t+C_3\mathrm{e}^{-2t},$$

所以 $y(x)=(C_1+C_2\ln|x|)x+\dfrac{C_3}{x^2}$.

4. 令 $x=\mathrm{e}^t$，原方程化为

$$D(D-1)y-2Dy+2y=t^2-2t,$$

即 $D^2y-3Dy+2y=t^2-2t$，特征方程为 $r^2-3r+2=0$，即 $(r-1)(r-2)=0$，$r_1=1,r_2=2$，从而齐次方程的通解为

$$\overline{y}(t)=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{2t}.$$

设非齐次方程的特解为 $y^*(t)=at^2+bt+c$，代入方程，得

$$2a-3(2at+b)+2(at^2+bt+c)=t^2-2t,$$

比较系数有 $2a=1,2b-6a=-2,c+2a-3b=0$，得 $a=\dfrac12,b=\dfrac12,c=\dfrac14$，从而

$$y^*(t)=\frac12t^2+\frac12t+\frac14,$$

所以 $y(t)=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{2t}+\dfrac12t^2+\dfrac12t+\dfrac14$，$y(x)=C_1x+C_2x^2+\dfrac12\left(\ln^2x+\dfrac12\ln x+\dfrac12\right)$.

5. 令 $x=\mathrm{e}^t$，原方程化为

$$D(D-1)y+Dy-4y=\mathrm{e}^{3t},$$

即 $D^2y-4y=\mathrm{e}^{3t}$，特征方程为 $r^2-4=0,\quad r_{1,2}=\pm 2$，从而齐次方程的通解为

$$\overline{y}(t)=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}.$$

自由项 $f(t)=\mathrm{e}^{3t}$ 的 $\lambda=3$ 不是特征根，故设特解 $y^*(t)=a\mathrm{e}^{3t}$，代入方程得

$$9a\mathrm{e}^{3t}-4a\mathrm{e}^{3t}=\mathrm{e}^{3t}\Rightarrow a=\frac{1}{5},$$

所以

$$y^*(t)=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{3t},\quad y(t)=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{5}\mathrm{e}^{3t},$$

$$y(x)=C_1x^2+\frac{C_2}{x^2}+\frac{1}{5}x^3.$$

6. 令 $x=\mathrm{e}^t$，原方程化为

$$D(D-1)y-Dy+4y=\mathrm{e}^t\sin t,$$

即 $D^2y-2Dy+4y=\mathrm{e}^t\sin t$，特征方程为 $r^2-2r+4=0,\quad r_{1,2}=1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$，从而齐次方程的通解为

$$\overline{y}(t)=\mathrm{e}^t(C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t).$$

自由项 $f(t)=\mathrm{e}^t\sin t,\alpha+\beta\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$ 不是特征根，故设特解 $y^*(t)=(a\cos t+b\sin t)\mathrm{e}^t$，则

$$y^{*\prime}=[(a+b)\cos t+(b-a)\sin t]\mathrm{e}^t,y^{*\prime\prime}=(2b\cos t-2a\sin t)\mathrm{e}^t,$$

代入方程，并比较系数，得 $a=0,b=\dfrac{1}{2}$，所以

$$y^*(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t\sin t,\quad y(t)=\mathrm{e}^t(C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^t\sin t,$$

$$y(x)=x(C_1\cos(\sqrt{3}\ln x)+C_2\sin(\sqrt{3}\ln x)+\frac{1}{2}x\sin\ln x.$$

7. 令 $x=\mathrm{e}^t$，原方程化为

$$D(D-1)y-3Dy+4y=\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^{2t},$$

即 $D^2y-4Dy+4y=\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^{2t}$，特征方程为 $r^2-4r+4=0,\ r_{1,2}=2$，从而齐次方程的通解为

$$\overline{y}(t)=\mathrm{e}^{2t}(C_1+C_2x).$$

自由项 $f(t)=\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^{2t}=f_1(t)+f_2(t)$，易知以 $f_1(t)$ 为自由项的微分方程的特解 $y_1^*=\mathrm{e}^t$，而以 $f_2(t)=t\mathrm{e}^{2t}$ 为自由项的微分方程中，$\lambda=2$ 是二重特征根，故设特解

$$y_2^*=t^2(at+b)\mathrm{e}^{2t}=\ (at^3+bt^2)\mathrm{e}^{2t},$$

计算 $y_2^{*\prime},y_2^{*\prime\prime}$，代入方程

$$D^2y-4Dy+4y=t\mathrm{e}^{2t},$$

并比较系数，解得 $a=\dfrac{1}{6},b=0$，从而 $y_2^*=\dfrac{1}{6}t^3\mathrm{e}^{2t}$，$y^*=y_1^*+y_2^*=\mathrm{e}^t+\dfrac{1}{6}t^3\mathrm{e}^{2t}$，所以

$$y(t)=\mathrm{e}^{2t}(C_1+C_2x)+\mathrm{e}^t+\frac{1}{6}t^3\mathrm{e}^{2t},$$

$$y(x)=x^2(C_1+C_2\ln x)+x+\frac{1}{6}x^3\ln^3x.$$

8. 令 $x=\mathrm{e}^t$，原方程化为

$$D(D-1)(D-2)y+2Dy-2y=t\mathrm{e}^{2t}+3\mathrm{e}^t,$$

即 $(D^3-3D^2+4D-2)y=t\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t$，特征方程为 $r^3-3r^2+4r-2=0$，即 $(r-1)(r^2-2r+2)=0$，$r_1=1,r_{2,3}=1\pm\mathrm{i}$，从而齐次方程的通解为

$$\overline{y}(t)=C_1\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^t(C_2\cos t+C_3\sin t).$$

记自由项 $f_1(t)=3\mathrm{e}^t, f_2(t)=t\mathrm{e}^{2t}$，由于 $\lambda_1=1$ 是单根，$\lambda_2=2$ 不是特征根，故可设特解

$$y^*=y_1^*+y_2^*=at\mathrm{e}^t+(bt+c)\mathrm{e}^{2t},$$

计算 $y^{*\prime},y^{*\prime\prime},y^{*\prime\prime\prime}$，代入方程并比较系数，解得

$$a=3,b=\frac{1}{2},c=-1,$$

所以 $y^*=3t\mathrm{e}^t+\left(\dfrac{t}{2}-1\right)\mathrm{e}^{2t}$，

$$y(t)=C_1\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^t(C_2\cos t+C_3\sin t)+3t\mathrm{e}^t+\left(\frac{t}{2}-1\right)\mathrm{e}^{2t}$$

$$y(x)=C_1x+x(C_2\cos\ln x+C_3\sin\ln x)+3x\ln x+\left(\frac{\ln x}{2}-1\right)x^2.$$

*习题 7-10

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z,\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=x;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y+3,\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y-3;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+5x+y=\mathrm{e}^t,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-x-3y=\mathrm{e}^{2t};\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=t,\\ 5x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+3y=t^2;\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3x+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4y=2\sin t,\\ 2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y=\cos t;\end{cases}$

解 (1) 对第一个方程左右两边关于 x 求导，并代入第二个方程，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y，即\ y''-y=0,$$

特征方程为 $r^2-1=0,r_{1,2}=\pm1$，所以

$$\begin{cases}y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x},\\ z=C_1\mathrm{e}^x-C_2\mathrm{e}^{-x}.\end{cases}$$

(2) 记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则 $D^2x=y,D^2y=x$，因此

$$D^4x=D^2y,$$

得 $D^4x=x$，即 $(D^4-1)x=0$，特征方程 $r^4-1=0,r_{1,2}=\pm1,r_{3,4}=\pm\mathrm{i}$，所以

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t. \end{cases}$$

(3) 两个方程分别相加、减, 得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3; \end{cases}$$

由此有 $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + x = 3$, 解得

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 3, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$$

(4) 记 $D = \dfrac{d}{dt}$, 则原方程组为

$$\begin{cases} (D+5)x + y = e^t, \\ -x + (D-3)y = e^{2t}. \end{cases}$$

利用行列式解方程组, 有

$$\begin{vmatrix} D+5 & 1 \\ -1 & D-3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & 1 \\ e^{2t} & D-3 \end{vmatrix},$$

即 $(D^2 + 2D - 14)x = -2e^t - e^{2t}$. 特征方程 $r^2 + 2r - 14 = 0, (r+1)^2 = 15$, 特征根为 $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{15}$, 所以

$$\bar{x}(t) = e^{-t}(C_1 e^{\sqrt{15}t} + C_2 e^{-\sqrt{15}t}).$$

设 $(D^2 + 2D - 14)x = -2e^t$ 有特解 $x_1^*(t) = ae^t$, 代入有

$$(a + 2a - 14)e^t = -2e^t \Rightarrow a = \frac{2}{11},$$

所以 $x_1^*(t) = \dfrac{2}{11}e^t$. 设 $(D^2 + 2D - 14)x = -e^{2t}$ 的特解 $x_2^*(t) = be^{2t}$, 代入有

$$(4b + 4b - 14b)e^{2t} = -e^{2t} \Rightarrow b = \frac{1}{6},$$

所以

$$x_2^*(t) = \frac{1}{6}e^{2t}, \quad x^*(t) = \frac{2}{11}e^t + \frac{1}{6}e^{2t},$$

$$x(t) = e^{-t}(C_1 e^{\sqrt{15}t} + C_2 e^{-\sqrt{15}t}) + \frac{2}{11}e^t + \frac{1}{6}e^{2t},$$

从而 $x'(t) = (-1+\sqrt{15})C_1 e^{-1+\sqrt{15}t} - (1+\sqrt{15})C_2 e^{-1-\sqrt{15}t} + \dfrac{2}{11}e^t + \dfrac{1}{6}e^{2t}$, 代入第一个方程, 得

$$y(t) = e^t - [x'(t) + 5x(t)] = (-4-\sqrt{15})C_1 e^{-1+\sqrt{15}t} - (4-\sqrt{15})C_2 e^{-1-\sqrt{15}t} - \frac{1}{11}e^t - \frac{7}{6}e^{2t}.$$

(5) 由方程组得

$$x = \frac{1}{5}t^2 - \frac{1}{5}\frac{dy}{dt} - \frac{3}{5}y,$$

所以$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{5}t^2-\frac{1}{5}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{3}{5}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，代入原方程组得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=2t^2-3t,$$

特征方程$r^2+1=0, r_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，所以$\overline{y}=C_1\cos t+C_2\sin t$.

设特解$y^*=at^2+bt+c$，计算出$y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$，代入方程并比较系数，解得

$$at=2, b=-3, c=-4,$$

所以$y^*=2t^2-3t-4$，

$$y(t)=C_1\cos t+C_2\sin t+2t^2-3t-4,$$

从而$y'(t)=-C_1\sin t+C_2\cos t+4t-3$，得

$$x(t)=-\frac{3C_1+C_2}{5}\cos t+\frac{C_1-3C_2}{5}\sin t-t^2+t+3.$$

(6) 记$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，可得到

$$(3D^2+16D+5)x=2\cos t,$$

其通解为$x=C_1\mathrm{e}^{-5t}+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}+\frac{8\sin t+\cos t}{65}$，而由$3Dx+7x-6y=2\cos t-2\sin t$，可得到$y(t)$，所以原方程组的通解为

$$\begin{cases}x=C_1\mathrm{e}^{-5t}+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}+\dfrac{8\sin t+\cos t}{65},\\ y=-\dfrac{4}{3}C_1\mathrm{e}^{-5t}+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}+\dfrac{61\sin t-33\cos t}{130}.\end{cases}$$

2. 求下列微分方程组满足所给初始条件的特解.

(1) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y, x|_{t=0}=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x, y|_{t=0}=1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-x=0, x|_{t=0}=1,\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y=0, y|_{t=0}=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x-y=0, x|_{t=0}=1,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-8x+y=0, y|_{t=0}=4;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-4x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y=\mathrm{e}^t, x|_{t=0}=\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x+y=0, y|_{t=0}=0;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=10\cos t, x|_{t=0}=2,\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=4\mathrm{e}^{-2t}, y|_{t=0}=0;\end{cases}$

(6) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+3y=\mathrm{e}^{-t}-1, x|_{t=0}=\dfrac{48}{49},\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=\mathrm{e}^{2t}+t, y|_{t=0}=\dfrac{95}{98}.\end{cases}$

解 (1) 记$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则原方程组写为

$$\begin{cases}Dx=y,\\ Dy=-x,\end{cases}$$

所以$D^2x=Dy=-x$，即$D^2x+x=0$，特征方程$r^2+1=0$，特征根$r_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，因此

$$\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t, \\ y = -C_1\sin t + C_2\cos t. \end{cases}$$

代入初始条件，得 $C_1 = 0, C_2 = 1$，所求特解为

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t. \end{cases}$$

(2) 记 $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，由第二个方程得 $y = -Dx, Dy = -D^2x$，代入第一个方程消去 y，得

$$D^2x - 2D^2x - x = 0, (D^2+1)x = 0 .$$

特征方程 $r^2 + 1 = 0$，特征根 $r_{1,2} = \pm\mathrm{i}$，所以通解为

$$\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t, \\ y = C_1\sin t - C_2\cos t. \end{cases}$$

将初始条件代入上式，得 $C_1 = 1, C_2 = 0$，于是所求特解为

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

(3) 记 $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，原方程为

$$\begin{cases} (D+3)x - y = 0, \\ -8x + (D+1)y = 0. \end{cases}$$

利用行列式求解，有 $\begin{vmatrix} D+3 & -1 \\ -8 & D+1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & D+1 \end{vmatrix}$，即

$$(D^2 + 4D - 5)x = 0 ,$$

特征方程 $r^2 + 4r - 5 = 0, (r-1)(r+5) = 0$，特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -5$，所以

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-5t} ,$$

从而 $x'(t) = C_1\mathrm{e}^t - 5C_2\mathrm{e}^{-5t}$，由第一个方程有 $y(t) = x'(t) + 3x(t)$，所以

$$y(t) = 4C_1\mathrm{e}^t - 2C_2\mathrm{e}^{-5t} .$$

将初始条件代入，得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 4C_1 - 2C_2 = 4, \end{cases}$$

计算得 $C_1 = 1, C_2 = 0$，所以所求特解为

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t, \\ y = 4\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

(4) 直接从第二个方程解出 y，得 $y = -x'(t) - 3x$，从而 $y'(t) = -x''(t) - 3$，代入第一个方程，消去 y，得 $x''(t) + x = -\mathrm{e}^t$，特征方程 $r^2 + 1 = 0$，特征根为 $r_{1,2} = \pm\mathrm{i}$，所以 x 的齐次微分方程的通解为 $\overline{x}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t$. 观察易知，x 的非齐次微分方程的一个特解为 $x^*(t) = -\dfrac{\mathrm{e}^t}{2}$，所以 $x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t - \dfrac{\mathrm{e}^t}{2}$，从而 $x'(t) = -C_1\sin t + C_2\cos t - \dfrac{\mathrm{e}^t}{2}$，代入 $y = -x'(t) - 3x$ 中得

$$y(t)=(C_1-3C_2)\sin t-(3C_1+C_2)\cos t+2\mathrm{e}^t .$$

将初始条件代入 $x(t),y(t)$ 中，得

$$\begin{cases}C_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2},\\ 2-(3C_1+C_2)=0,\end{cases}$$

计算得 $C_1=2,C_2=-4$，所以所求特解为

$$\begin{cases}x(t)=2\cos t-4\sin t-\dfrac{\mathrm{e}^t}{2},\\ y(t)=-2\cos t+14\sin t+2\mathrm{e}^t.\end{cases}$$

(5) 两个方程相加可解出

$$y(t)=5\cos t+2\mathrm{e}^{-2t}-x-x'(t),$$

从而 $y'(t)=-5\sin t-4\mathrm{e}^{-2t}-1-x''(t)$，代入第二个方程，可消去 y，得

$$x''(t)+2x'(t)+2x=100\cos t-5\sin t-4\mathrm{e}^{-2t} .$$

特征方程为 $r^2+2r+2=0,(r+1)^2=-1$，得特征根为 $r_{1,2}=-1\pm\mathrm{i}$，所以

$$\overline{x}(t)=\mathrm{e}^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t) .$$

因为自由项中的 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta=\pm\mathrm{i}$ 及 $\lambda=-2$ 不是特征根，故设特解

$$x^*=x_1^*+x_2^*=a\cos t+b\sin t+c\mathrm{e}^{-2t} ,$$

计算 $x^{*\prime},x^{*\prime\prime}$，代入方程，并比较系数，可得

$$a=4,b=3,c=-2 ,$$

因此 $x^*=4\cos t+3\sin t-2\mathrm{e}^{-2t}$，所以

$$x(t)=\mathrm{e}^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)+4\cos t+3\sin t-2\mathrm{e}^{-2t} ,$$

从而

$$x'(t)=\mathrm{e}^{-t}[(C_2-C_1)\cos t-(C_1+C_2)\sin t]-4\sin t+3\cos t+4\mathrm{e}^{-2t} ,$$

代入方程 $y(t)=5\cos t\quad+2\mathrm{e}^{-2t}-x-x'(t)$ 中，得

$$y(t)=\mathrm{e}^{-t}(C_1\sin t-C_2\cos t)-2\cos t+\sin t .$$

将初始条件代入，得

$$\begin{cases}C_1+4-2=2,\\ -C_2-2=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=0,\\ C_2=-2,\end{cases}$$

所以所求特解为

$$\begin{cases}x(t)=-2\mathrm{e}^{-t}\sin t+4\cos t+3\sin t-2\mathrm{e}^{-2t}\\ y(t)=2\mathrm{e}^{-t}\cos t-2\cos t+\sin t\end{cases}.$$

(6) 将两个方程相减，可消去 $x'(t),y'(t)$，得

$$y(t)=\frac{3}{2}x(t)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1+t}{2} ,$$

从而 $y'(t)=\dfrac{3}{2}x'(t)-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{2t}-\dfrac{1}{2}$，代入第二个方程，得

$$\frac{5}{2}x'(t)+\frac{7}{2}x=\frac{5}{2}\mathrm{e}^{2t}+\frac{3}{2}t+1\text{，即 }x'(t)+\frac{7}{5}x=\mathrm{e}^{2t}+\frac{3}{5}t+\frac{2}{5}.$$

由一阶线性微分方程的求解公式，知其通解为

$$x(t)=C_1\mathrm{e}^{-\frac{7}{5}t}+\frac{5}{17}\mathrm{e}^{2t}+\frac{3}{7}t-\frac{1}{49}.$$

将初始条件代入，得 $C_1=\dfrac{12}{17}$，所以

$$x(t)=\frac{12}{17}\mathrm{e}^{-\frac{7}{5}t}+\frac{5}{17}\mathrm{e}^{2t}+\frac{3}{7}t-\frac{1}{49},$$

将 $x(t)$ 代入方程 $y(t)=\dfrac{3}{2}x(t)+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\dfrac{1+t}{2}$，得

$$y(t)=\frac{18}{17}\mathrm{e}^{-\frac{7}{5}t}-\frac{1}{17}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{7}t-\frac{26}{49}.$$

联立以上求到的 $x(t),y(t)$，便是原初值问题的特解.

总习题七

1. 填空.

(1) $xy'''+2x^2y'^2+x^3y=x^4+1$ 是________阶微分方程;

(2) 一阶线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解为________;

(3) 与积分方程 $y=\int_{x_0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x$ 等价的微分方程初值问题是________;

(4) 已知 $y=1,y=x,y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为________________.

答 (1) 3; 提示: 微分方程中未知函数 y 的最高阶导数的阶数是 3 阶.

(2) $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$;

提示: 用分离变量法得到一阶齐次线性微分方程的通解 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，然后用常数变易法求得一阶非齐次线性微分方程的通解 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$.

(3) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\\ y|_{x=x_0}=0.\end{cases}$;

提示: 将积分方程关于 x 求导，得到微分方程，再令 $x=x_0$，得到初始条件.

(4) $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$.

提示: 将二阶非齐次线性微分方程的两个解 $y=x,y=x^2$ 分别减去第三个解 $y=1$，得到二阶齐次线性微分方程的两个线性无关的解 $y=x-1,y=x^2-1$，故二阶齐次线性微分方程的通解为 $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)$，再根据二阶非齐次线性微分方程通解的结构，得到本题方程的通解.

2. 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论:

(1) 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程的通解是(　　);

A. $C[y_1(x)-y_2(x)]$　　B. $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

C. $C[y_1(x)+y_2(x)]$　　D. $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

(2) 具有特解的三阶常系数齐次线性微分方程是(　　).

A. $y'''-y''-y'+y=0$　　B. $y'''+y''-y'-y=0$

C. $y'''-6y''+11y'-6y=0$　　D. $y'''-2y''-y'+2y=0$

答　(1) B; 提示: 将一阶非齐次线性微分方程的两个解相减, 再乘以常数 C，得到一阶齐次线性微分方程的通解, 再根据一阶非齐次线性微分方程通解的结构, 即通解等于一阶齐次线性微分方程的通解加上一阶非齐次线性微分方程的一个特解, 即得本题答案 B.

(2) B. 提示: 本题中的三个解是线性无关的, 所以 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}+C_3\mathrm{e}^{x}$ 是微分方程的通解, 特别地取 $C_1=C_2=C_3=1$，将解 $y=\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}$ 代入四个选择方程中, 其中只有答案 B 方程是满足的, 或者直接把三个特解分别代入四个选择方程中, 其中只有答案 B 方程是能使三个特解同时满足的方程.

3. 求以下各式所表示的函数为通解的微分方程.

(1) $(x+C)^2+y^2=1$（其中 C 为任意常数）;

(2) $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$（其中 C_1,C_2 为任意常数）.

解　(1) 对方程 $(x+C)^2+y^2=1$ 的左右两边同时求导, 得

$$2(x+C)+2yy'=0,$$

所以 $2\sqrt{1-y^2}+2yy'=0$, 从而 $yy'=-\sqrt{1-y^2}$，即 $y^2y'^2=1-y^2$，得

$$y^2(y'^2+1)=1$$

为所求的微分方程.

(2) 对 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$ 求导, 得

$$y'=C_1\mathrm{e}^{x}+2C_2\mathrm{e}^{2x},\quad y''=C_1\mathrm{e}^{x}+4C_2\mathrm{e}^{2x},$$

消去 y,y',y'' 中的 $C_1\mathrm{e}^{x},C_2\mathrm{e}^{2x}$，可得

$$2y-y'=C_1\mathrm{e}^{x}=2y'-y'',$$

所以 $y''-3y'+2y=0$ 为所求的微分方程.

4. 求下列微分方程的通解.

(1) $xy'+y=2\sqrt{xy}$;　　(2) $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2(\ln y-x)}$;　　*(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy-x^3y^3=0$

(5) $y''+y'^2+1=0$;　　(6) $yy''-y'^2-1=0$;

(7) $y''+2y'+5y=\sin 2x$;　　(8) $y'''+y''-2y'=x(\mathrm{e}^{x}+4)$;

*(9) $(y^4-3x^2)\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}x=0$;　　(10) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$.

解　(1) 方程左右两边同时除以 x，得 $y'+\dfrac{y}{x}=2\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux, y'=u+xu'$，从而原方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=2\sqrt{u}\ ,$$

即 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2(\sqrt{u}-u),\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{2(\sqrt{u}-u)}$，所以

$$\ln|x|=\int\frac{\mathrm{d}u}{2(\sqrt{u}-u)}\overset{令\sqrt{u}=t}{=}\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln|1-t|+C_1,$$

因此 $x(1-\sqrt{u})=C(C=\pm\mathrm{e}^{C_1})$，即 $x\left(1-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=C$，所以微分方程的通解为

$$x-\sqrt{xy}=C\ .$$

(2) 将方程左右两边同时除以 $x\ln x$，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x\ln x}=\frac{a(\ln x+1)}{\ln x},$$

于是由一阶线性方程的求解公式，有

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}}\left(a\int\frac{\ln x+1}{\ln x}\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}}+C\right),$$

计算得到 $y=\frac{1}{\ln x}(ax\ln x+C)$，所以微分方程的通解为

$$y=ax+\frac{C}{\ln x}\ .$$

(3) 原方程可变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2\ln y-2x}{y},$$

即 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{x}{y}=\frac{2\ln y}{y}$，由一阶线性微分方程的求解公式，有

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left(2\int\frac{\ln y}{y}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=\frac{1}{y^2}\left(2\int y\ln y\mathrm{d}y+C\right)=\ln y-\frac{1}{2}+\frac{C}{y^2},$$

故微分方程的通解为 $x=\ln y+\frac{C}{y^2}-\frac{1}{2}$.

*(4) 本题方程为伯努利方程，$n=3,P(x)=x,Q(x)=x^3$. 令 $z=y^{-2}$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)\ ,$$

即 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-2xz=-2x^3$，这是一个一阶线性微分方程，由一阶线性微分方程的求解公式，有

$$z=\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\left(-\int 2x^3\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x^2+1+C\mathrm{e}^{x^2}\ ,$$

故微分方程的通解为 $y^{-2}=x^2+1+C\mathrm{e}^{x^2}$.

(5) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程变成

$$p'+p^2+1=0\ ,$$

分离变量且积分可得

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{1+p^2} = -\int \mathrm{d}x,$$

$$\arctan p = -x + C_1,$$

$$y' = p = \tan(-x + C_1).$$

原方程的通解

$$y = \int -\tan(x - C_1)\mathrm{d}x = \ln\left|\cos(x - C_1)\right| + C_2.$$

(6) 令 $y' = p$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程，即

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 - 1 = 0,$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{p\mathrm{d}p}{1+p^2}$，于是

$$\ln|C_1 y| = \frac{1}{2}\ln(1+p^2)，即 (C_1 y)^2 = 1 + p^2,$$

得 $p = \pm\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}$，于是

$$\mathrm{d}x = \pm\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}} = \pm\frac{1}{C_1}\frac{\mathrm{d}(C_1 y)}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}},$$

得 $C_1 x = \mathrm{arch}(C_1 y) - C_2$，所以

$$C_1 y = \mathrm{ch}(C_1 x + C_2) = \frac{\mathrm{e}^{C_1 x + C_2} + \mathrm{e}^{-C_1 x - C_2}}{2},$$

故微分方程的通解为 $y = \dfrac{\mathrm{e}^{C_1 x + C_2} + \mathrm{e}^{-C_1 x - C_2}}{2C_1}$.

(7) 先求齐次方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解. 特征方程为 $r^2 + 2r + 5 = 0$，特征根为 $r_{1,2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$，所以齐次方程的通解为

$$\overline{y} = \mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

再求原方程的一个特解. 由于 2i 不是特征根，故可设特解为 $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$，从而

$$y^{*\prime} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, y^{*\prime\prime} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x,$$

代入原方程，有

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) + 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 5(A\cos 2x + B\sin 2x) = \sin 2x,$$

即 $(4B + A)\cos 2x + (B - 4A - 1)\sin 2x = 0$，显然 $\cos 2x, \sin 2x$ 是线性无关的，于是有

$$\begin{cases} 4B + A = 0 \\ B - 4A - 1 = 0 \end{cases},$$

解得 $A = -\dfrac{4}{17}, B = \dfrac{1}{17}$，故 $y^* = -\dfrac{4}{17}\cos 2x + \dfrac{1}{17}\sin 2x$，所以原方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x.$$

(8) 先求齐次方程 $y''' + y'' - 2y' = 0$ 的通解. 特征方程为 $r^3 + r^2 - 2r = 0$，其特征根为

$$r_1=0, r_2=1, r_3=-2,$$

于是齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1+C_2\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{-2x}.$$

下面分别求非齐次方程 $y'''+y''-2y'=x\mathrm{e}^x$ 和 $y'''+y''-2y'=4x$ 的特解 y_1^*, y_2^*.

因为 $\lambda=1$ 是特征方程的单根，故可设 $y_1^*=x(Ax+B)\mathrm{e}^x$，于是

$$y_1^{*\prime}=\left[Ax^2+(2A+B)x+B\right]\mathrm{e}^x,$$

$$y_1^{*\prime\prime}=\left[Ax^2+(4A+B)x+2(A+B)\right]\mathrm{e}^x,$$

$$y_1^{*\prime\prime\prime}=\left[Ax^2+(6A+B)x+6A+3B\right]\mathrm{e}^x,$$

代入方程 $y'''+y''-2y'=x\mathrm{e}^x$ 中，得

$$6Ax+8A+3B=x,$$

比较系数，得 $A=\dfrac{1}{6}, B=-\dfrac{4}{9}$，所以 $y_1^*=x\left(\dfrac{1}{6}x-\dfrac{4}{9}\right)\mathrm{e}^x$.

因为 $\lambda=0$ 是特征方程的单根，故可设 $y_2^*=x(Cx+D)$，$y_2^{*\prime}=2Cx+D, y_2^{*\prime\prime}=2C, y_2^{*\prime\prime\prime}=0$，代入方程 $y'''+y''-2y'=4x$，得

$$2C-4Cx-2D=4x,$$

比较系数，得 $C=-1, D=-1$，因此 $y_2^*=-x^2-x$，故所求的原方程的通解为

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{-2x}+x\left(\frac{1}{6}x-\frac{4}{9}\right)\mathrm{e}^x-x^2-x.$$

*(9) 原方程可变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{3}{y}x=-\frac{y^3}{x},$$

这是一个伯努利方程，在此方程的左右两边同时乘以 x，得

$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{3}{y}x^2=-y^3.$$

令 $x^2=z$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，且原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-\frac{6}{y}z=-2y^3,$$

求解得 $z=\mathrm{e}^{\int\frac{6}{y}\mathrm{d}y}\left(-2\displaystyle\int y^3\mathrm{e}^{-\int\frac{6}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=y^4+Cy^6$，将 $z=x^2$ 代入，故所求原方程的通解为

$$x^2=y^4+Cy^6.$$

(10) 令 $u=\sqrt{x^2+y}$，即 $y=u^2-x^2$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-2x$，且原方程化为

$$2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-x=u,\text{ 即 }\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{x}{2u}=\frac{1}{2}.$$

又令 $\frac{u}{x}=v$，即 $u=xv$，则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=v+x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，原方程化为

$$v+x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2v}=\frac{1}{2},$$

分离变量得

$$\frac{v\mathrm{d}v}{2v^2-v-1}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得

$$-\frac{1}{2}\ln|x|=\int\frac{v\mathrm{d}v}{2v^2-v-1}=\frac{1}{3}\left(\int\frac{1}{v-1}\mathrm{d}v+\int\frac{1}{2v-1}\mathrm{d}v\right)=\frac{1}{3}\left(\ln|v-1|+\frac{1}{2}\ln|2v-1|\right)+C_1,$$

即 $(v-1)^2(2v-1)x^3=C_2(C_2=\pm\mathrm{e}^{-6C_1})$，将 $v=\frac{u}{x}$ 代入，得

$$2u^3-3xu^2+x^3=C_2,$$

再将 $u=\sqrt{x^2+y}$ 代入，得所求原方程的通解为

$$2(x^2+y)^{\frac{3}{2}}-3x(x^2+y)+x^3=C_2,$$

即

$$(x^2+y)^{\frac{3}{2}}=x^3+\frac{3}{2}xy+C\left(C=\frac{C_2}{2}\right).$$

5. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

*(1) $y^3\mathrm{d}x+2(x^2-xy^2)\mathrm{d}y=0$，$x=1$ 时 $y=1$；

(2) $y''-ay'^2=0$，$x=0$ 时 $y=0, y'=-1$；

(3) $2y''-\sin 2y=0$，$x=0$ 时 $y=\frac{\pi}{2}, y'=1$；

(4) $y''+2y'+y=\cos x$，$x=0$ 时 $y=0, y'=\frac{3}{2}$.

解 *(1) 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2}{y}x=-\frac{2}{y^3}x^2.$$

这是一个伯努利方程. 令 $z=x^{-1}$，则方程可变为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{y}z=\frac{2}{y^3},$$

利用一阶线性微分方程的求解公式，有

$$z=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left(\int\frac{2}{y^3}\mathrm{e}^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{y^2}(2\ln|y|+C),$$

即 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y^2}(2\ln|y|+C)$，或 $x(2\ln|y|+C)-y^2=0$. 将初始条件 $x=1$ 时 $y=1$ 代入，得 $C=1$，所以 $x(2\ln|y|+1)-y^2=0$ 为所求特解.

(2) 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=ap^2，即 \frac{\mathrm{d}p}{p^2}=a\mathrm{d}x,$$

积分得

$$-\frac{1}{p}=ax+C_1, p=-\frac{1}{ax+C_1},$$

即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{ax+C_1}$，将初始条件 $x=0$ 时 $y'=-1$ 代入，得 $C_1=1$，所以

$$y=-\int\frac{1}{ax+1}\mathrm{d}x,$$

得 $y=-\frac{1}{a}\ln|ax+1|+C_2$，将初始条件 $x=0$ 时 $y=0$ 代入，得 $C_2=0$，所以 $y=-\frac{1}{a}\ln|ax+1|$ 为所求的特解.

(3) 令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程化为

$$2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\sin 2y,$$

求解得 $p^2=\sin^2 y+C_1$，将初始条件 $x=0$ 时 $y=\frac{\pi}{2},y'=1$ 代入，得 $C_1=0$，即有

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\sin^2 y,$$

从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sin y,\mathrm{d}x=\pm\csc y\mathrm{d}y$，积分得 $x=\pm\ln|\tan\frac{y}{2}|+C_2$，将初始条件 $x=0$ 时 $y=\frac{\pi}{2}$ 代入，得 $C_2=0$，故有 $x=\pm\ln|\tan\frac{y}{2}|$，所以 $y=2\arctan\mathrm{e}^{\pm x}$ 为所求的特解.

(4) 原方程的特征方程为 $r^2+2r+1=0$，得特征根 $r_{1,2}=-1$，所以原方程对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}.$$

设原方程的特解为 $y^*=A\cos x+B\sin x$，则

$$y^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x, y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x$$

代入原方程，得

$$(A+2B-A)\cos x+(B-2A-B)\sin x=\cos x,$$

比较系数，得 $A=0,B=\frac{1}{2}$，所以 $y^*=\frac{\sin x}{2}$，故原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\frac{\sin x}{2},$$

且 $y'=C_2\mathrm{e}^{-x}-(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\frac{\cos x}{2}$，将初始条件 $x=0$ 时 $y=0,y'=\frac{3}{2}$ 代入，得

$$C_1=0,C_2=1,$$

所以 $y=x\mathrm{e}^{-x}+\frac{\sin x}{2}$ 为所求的特解.

6. 已知某曲线经过点 $(1,1)$，它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，求它的方程.

解　设切线经过点 (X,Y)，曲线切点的坐标为 (x,y)，那么切线方程为

$$y-Y=y'(x-X),$$

令 $X=0$，可得切线在纵轴上的截距为

$$Y=y-y'x,$$

于是由题设条件，有 $y-y'x=x$，这就是所求曲线所满足的方程. 下面来求解此方程.

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y'=u+xu'$，代入上面方程中，得

$$ux-ux-x^2u'=x\text{，即 } x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-1,$$

分离变量计算得到 $u=-\ln|x|+C$，即 $\dfrac{y}{x}=-\ln|x|+C$，因为曲线经过点 $(1,1)$，即 $x=1$ 时 $y=1$，得 $C=1$，所以 $y=x-x\ln|x|$ 为所求的曲线方程.

7. 已知某车间的容积为 $30\times30\times6\mathrm{m}^3$，其中的空气含 0.12%的 CO_2（以容积计算）. 现以含 CO_2 0.04%的新鲜空气输入，问每分钟应输入多少，才能在 30min 后使车间空气中 CO_2 的含量不超过 0.06%?（假定输入的新鲜空气与原有空气很快混合均匀后，以相同的流量排出.）

解　设每分钟应输入 a 立方米的空气，设 t 时刻车间中 CO_2 的浓度为 $x(t)$，则车间中 CO_2 的含量在 t 时刻经过 $\mathrm{d}t$ 分钟的改变量为

$$30\times30\times6\mathrm{d}x=0.0004a\mathrm{d}t-ax\mathrm{d}t$$

求解得 $x=0.0004+C\mathrm{e}^{-\frac{a}{5400}t}$，将初始条件 $t=0, x=0.0012$ 代入，得 $C=0.0008$，于是有

$$a=-\frac{5400}{t}\ln\frac{x-0.0004}{0.0008},$$

当 $t=30$ 时，要求 $x\leqslant0.0006$，将 $x|_{t=30}=0.0006$ 代入，得 $a\approx250$，所以每分钟应输入新鲜空气不少于约 $250\mathrm{m}^3$ 时，在 30min 后使车间空气中 CO_2 的含量不会超过 0.06%.

8. 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x)\cos x+2\int_0^x\varphi(t)\sin t\mathrm{d}t=x+1,$$

求 $\varphi(x)$.

解　对题中方程关于 x 求导，得

$$\varphi'(x)\cos x+\varphi(x)\sin x=1\text{，即 } \varphi'(x)+\varphi(x)\tan x=\sec x,$$

由一阶线性微分方程的求解公式，计算得 $\varphi(x)=\sin x+C\cos x$. 由于当 $\varphi(x)|_{x=0}=1$，故 $C=1$，所以 $\varphi(x)=\sin x+\cos x$.

9. 设光滑曲线 $y=\varphi(x)$ 过原点，且当 $x>0$ 时，$\varphi(x)>0$，对应于 $[0,x]$ 一段曲线的弧长为 e^x-1，求 $\varphi(x)$.

解　由对应于 $[0,x]$ 一段曲线的弧长为 e^x-1，得

$$\int_0^x\sqrt{1+\varphi'(t)^2}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x-1,$$

求导整理得$\varphi'(x)=\sqrt{e^{2x}-1}$，积分得

$$\varphi(x)=\int\sqrt{e^{2x}-1}\,dx \overset{\text{令}u=\sqrt{e^{2x}-1}}{=} \int\frac{u^2}{1+u^2}du=u-\arctan u+C$$

$$=\sqrt{e^{2x}-1}-\arctan\sqrt{e^{2x}-1}+C,$$

又由曲线$y=\varphi(x)$过原点, 即$\varphi(x)|_{x=0}=0$, 得$C=0$，所以曲线的方程为

$$\varphi(x)=\sqrt{e^{2x}-1}-\arctan\sqrt{e^{2x}-1}.$$

10. 设$y_1(x),y_2(x)$是二阶齐次线性方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的两个解, 令

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x),$$

证明: (1) $W(x)$满足方程$W'+p(x)W=0$； (2) $W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}$.

证明 (1)由$W(x)$的表达式, 得

$$W'=y_1'y_2'+y_1y_2''-y_1''y_2-y_1'y_2'=y_1y_2''-y_1''y_2,$$

计算 $$W'+p(x)W=y_1[y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2]-y_2[y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1],$$

又由题设知$y_i''+p(x)y_i'+q(x)y_i=0,i=1,2$，所以$W'+p(x)W=0$.

(2) 因为$W'+p(x)W=0$已证, 所以分离变量有

$$\frac{dW}{W}=-p(x)dx,$$

在$[x_0,x]$上积分得$\int_{x_0}^{x}\frac{dW}{W}=-\int_{x_0}^{x}p(t)dt$，所以

$$\ln W(x)-\ln W(x_0)=-\int_{x_0}^{x}p(t)dt,$$

故$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}$.

***11**. 求下列欧拉方程的通解.

(1) $x^2y''+3xy'+y=0$； (2) $x^2y''-4xy'+6y=x$.

解 (1) 令$x=e^t(x>0)$，即$t=\ln x$，并记$D=\frac{d}{dt}$，则原方程化为

$$D(D-1)y+3Dy+y=0,$$

即$(D^2+2D+1)y=0$. 该方程的特征方程为$r^2+2r+1=0$，特征根为$r_{1,2}=-1$，于是该方程的通解为

$$y=e^{-t}(C_1+C_2t),$$

将$t=\ln x$代入, 得当$x>0$时, 原方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}(C_1+C_2\ln x).$$

当 $x<0$ 时，令 $x=-\mathrm{e}^t$，即 $t=\ln(-x)$，可类似求得 $y=\dfrac{1}{x}[C_1+C_2\ln(-x)]$，所以原方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}(C_1+C_2\ln|x|).$$

(2) 令 $x=\mathrm{e}^t(x>0)$，即 $t=\ln x$，并记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则原方程化为

$$D(D-1)y-4Dy+6y=\mathrm{e}^t,$$

即 $(D^2-5D+6)y=\mathrm{e}^t$. 该方程的特征方程为 $r^2-5r+6=0$，特征根为 $r_1=2,r_2=3$，于是该方程对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{3t},$$

该非齐次方程有特解 $y^*=A\mathrm{e}^t$，则 $y^{*\prime}=A\mathrm{e}^t,y^{*\prime\prime}=A\mathrm{e}^t$，代入非齐次方程得

$$(A-5A+6A)\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t,$$

得 $A=\dfrac{1}{2}$，因此特解 $y^*=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t$，从而非齐次方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^t,$$

将 $t=\ln x$ 代入，得原方程的通解为

$$y=C_1x^2+C_2x^3+\frac{1}{2}x.$$

***12**. 求下列常系数线性微分方程组的通解.

(1) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0,\\[2mm] 3\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x+4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+3y=t;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=\mathrm{e}^t.\end{cases}$

解　(1) 第一方程乘以 3 减去第二个方程得

$$2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2x=-t,$$

两边对 t 求导，得

$$2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-1,$$

从第一个方程中解出 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y$，代入上面的方程中，得到仅含 $y(t)$ 的二阶方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=-\frac{1}{2},$$

利用常系数非齐次二阶线性微分方程的求解方法，易求得此方程的通解为

$$y=(D_1+D_2t)\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2},$$

又由方程 $2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2x=-t$，有 $x=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\dfrac{t}{2}$，从而 $x=(D_2-D_1-D_2t)\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{t}{2}$，令 $C_1=D_2-D_1$，$C_2=-D_2$，得方程组的通解为

$$\begin{cases} x=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{t}{2}, \\ y=-(C_1+C_2+C_2t)\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(2) 记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则方程组可写为

$$\begin{cases} (D^2+2D+1)x+(D+1)y=0, \\ (D^2+2D+1)y+(D+1)x=\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

将第一个方程乘以 $(D+1)$ 减去第二个方程, 从而消去 y，得

$$(D+1)^3x-(D+1)x=-\mathrm{e}^t,$$

即

$$(D^3+3D^2+2D)x=-\mathrm{e}^t,$$

该方程的特征方程为 $r^3+3r^2+2r=0$，特征根为 $r_1=0,r_2=-1,r_3=-2$，于是该方程对应齐次方程的通解为

$$\overline{x}=C_1+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{-2t},$$

因为自由项 $-\mathrm{e}^t$ 中 $\lambda=1$ 不是特征根, 所以可设非齐次方程的特解为 $x^*=A\mathrm{e}^t$，则

$$x^{*\prime}=x^{*\prime\prime}=x^{*\prime\prime\prime}=A\mathrm{e}^t,$$

代入方程得 $(A+3A+2A)\mathrm{e}^t=-\mathrm{e}^t$，知 $A=-\dfrac{1}{6}$，于是关于 x 的非齐次方程的通解为

$$x=C_1+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^t,$$

于是 $x'=-C_2\mathrm{e}^{-t}-2C_3\mathrm{e}^{-2t}-\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^t, x''=C_2\mathrm{e}^{-t}+4C_3\mathrm{e}^{-2t}-\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^t$，由第一个方程得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=-(x''+2x'+x),$$

将 x,x',x'' 代入此方程, 得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=-C_1-C_3\mathrm{e}^{-2t}+\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^t$，这是一个关于 y 的一阶线性微分方程, 由一阶线性微分方程的求解公式, 得

$$y=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}t}\left[\int\left(-C_1-C_3\mathrm{e}^{-2t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^t\right)\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_4\right]=C_4\mathrm{e}^{-t}-C_1+C_3\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^t,$$

故所求方程组的通解为

$$\begin{cases} x=C_1+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{-2t}-\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^t \\ y=C_4\mathrm{e}^{-t}-C_1+C_3\mathrm{e}^{-2t}+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^t \end{cases}.$$

第　二　篇

历年考研部分试题及解答

第一部分　函数　极限　连续

一、重点内容提示

函数是微积分研究的对象，极限是微积分的理论基础，又是研究微积分的基本工具，而函数的连续性是函数可导与可积的基本条件，它们是每年数学的必考内容之一.

本部分的重要内容包括：函数的概念，分段函数与复合函数的概念以及函数的运算，数列极限与函数极限的概念与性质，求极限的重要方法（重点是洛必达法则与等价无穷小因子代换），确定极限式中的待定参数以及无穷小量的阶数，函数连续性以及间断点类型的判定，闭区间上连续函数的重要性质（有界性、最大值与最小值定理、介值定理）.

本部分也是微积分后续各部分的重要基础，考研的同学在复习时务必注意前后贯通，灵活运用.

二、考研部分试题及答案

1.（2013 年数一 4 分）已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，$k,c$ 为常数，且 $c\neq 0$，则（　　）.

A. $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$.　　B. $k=2,c=\dfrac{1}{2}$.　　C. $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$.　　D. $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

答案　D.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\dfrac{1}{k}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^{k-1}}=c$，$k-1=2,\dfrac{1}{k}=c$ 即 $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

2.（2003 年数一 4 分）设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有（　　）.

A. $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　B. $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

答案　D.

3.（2000 年数二 3 分）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为（　　）.

A. 0.　　B. 6 .　　C. 36 .　　D. ∞ .

答案　C.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-\sin 6x}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-\sin 6x}{x^3}=36$.

4.（2010 年数一 4 分）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$（　　）.

A. 1.　　B. e.　　C. e^{a-b} .　　D. e^{b-a} .

答案　C.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left[\left(1+\dfrac{1}{-\frac{x}{a}}\right)^{-\frac{x}{a}}\right]^{-a}\cdot\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{b}}\right)^{\frac{x}{b}}\right]^{b}}=e^{a-b}$.

5.（2004 年数一 4 分）把 $x\to0^+$ 时的无穷小 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是（　　）.

A. α,β,γ.　　B. α,γ,β.　　C. β,α,γ.　　D. β,γ,α.

答案　B.

解　分别求出 α,β,γ 关于 x 的阶数较为方便.

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$，

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\beta}{x^k}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan\sqrt{x^2}\,2x}{kx^{k-1}}=\dfrac{2}{k}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan x}{xx^{k-3}}\Rightarrow k=3$，

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\gamma}{x^k}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin(\sqrt{x})^3\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{kx^{k-1}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin(\sqrt{x})^3}{k(\sqrt{x})^3x^{k-2}}\Rightarrow k=2$.

6.（2013 年数二 4 分）$\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)$ 是（　　）.

A. 比 x 高阶的无穷小.　　B. 比 x 低阶的无穷小.

C. 与 x 同阶但不等价的无穷小.　　D. 与 x 等价的无穷小.

答案　C.

解　提示：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{\sin\alpha(x)}\dfrac{\sin\alpha(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}$.

7.（2007 年数一 4 分）当 $x\to0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是（　　）.

A. $1-e^{\sqrt{x}}$.　　B. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　　D. $1-\cos\sqrt{x}$.

答案　B.

解　注意 $1-e^{\sqrt{x}}=-(e^{\sqrt{x}}-1)\sim-\sqrt{x}$；$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$；$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}x$.

8.（2009 年数一 4 分）$x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　　）.

A. $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　B. $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.　　C. $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　D. $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

答案　A.

解　$I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin ax}{-bx^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\Rightarrow a=1$，

$I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{-3bx^2}=-\dfrac{1}{6b}=1\Rightarrow b=-\dfrac{1}{6}$.

9.（2007 年数二 4 分）$f(x)=\dfrac{\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)\tan x}{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$ ____ .

A. 0. B. 1. C. $-\dfrac{\pi}{2}$. D. $\dfrac{\pi}{2}$.

答案 A.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)\tan x}{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}=1$； $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e\tan x}{xe^{\frac{1}{x}}-e}=-1$. 故选 A.

10.（2013 数学三 4 分）$f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 可去间断点的个数为（ ）.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

答案 C.

解 间断点为 $x=0,1,-1$,

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=1$,

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=1$,

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\infty$,

所以 $x=0,1$ 为可去间断点.

11.（2000 年数三 3 分）对任意 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$（ ）.

A. 存在且等于零. B. 存在但不一定为零.

C. 一定不存在. D. 不一定存在.

答案 D.

解 用排除法. 令 $\varphi(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$, $f(x)=1$, $g(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$,

显然 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$.

此时 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$. 故 A 和 C 都不正确.

为排除 B, 再令 $\varphi(x)=x-\dfrac{1}{x^2}$, $f(x)=x$, $g(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$, 显然 $\varphi(x),f(x),g(x)$ 满足题设全部条件, 但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, 故应选 D.

12.（1998 年数四 4 分）设 $0<a<b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$ ____ .

A. a. B. a^{-1}. C. b. D. b^{-1}.

答案 B.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}}=\dfrac{1}{a}\sqrt[n]{1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$,

由于 $1<\sqrt[n]{1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}<\sqrt[n]{2}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, 由两边夹定理

$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{a}=a^{-1}$，故应选 B.

13.（2010 年数三 4 分）$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^x\right]=1$，则 a 等于（　　）.

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

答案　C.

解　对任何常数 a 可得

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^x\right]=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\mathrm{e}^x}{x}+a\mathrm{e}^x\right)=\lim_{x\to0}\frac{1-\mathrm{e}^x}{x}+a\lim_{x\to0}\mathrm{e}^x=-\lim_{x\to0}\mathrm{e}^x+a=a-1,$$

从而　$a-1=1\Rightarrow a=2$.

故应选 C.

14.（1994 年数四 3 分）设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则（　　）.

A. $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$.　　B. $a=0,b=-2$.　　C. $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$.　　D. $a=1,b=-2$.

答案　A.

解　$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-a-2bx}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1-a-ax-2bx-2bx^2}{2x(1+x)}=2.$$

所以　$a=1$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax-bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-x-2bx-2bx^2}{2x(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{-1-2b-4bx}{2(x+1)}=2,$$

得 $b=-\dfrac{5}{2}$，故选 A.

15.（1998 年数一 3 分）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论 $f(x)$ 的间断点，其结论为（　　）.

A. 不存在间断点.　　B. 存在间断点 $x=1$.

C. 存在间断点 $x=0$.　　D. 存在间断点 $x=-1$.

答案　B.

解　提示：$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0 & x\leqslant-1\\ 1+x & -1<x<1\\ 1 & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}.$$

16.（2003 年数一 4 分）设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$（　　）.

A. 在 $x=0$ 处左极限不存在.　　B. 有跳跃间断点 $x=0$.

C. 在 $x=0$ 处右极限不存在.　　D. 有可去间断点 $x=0$.

答案　D.

解　$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0).$$

17.（2004 年数一 4 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 则（　　）.

A. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.　　B. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

C. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.　　D. $g(x)$ 在点 $x=0$ 的连续性与 a 的取值有关.

答案　D.

解　$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=a$.

18.（2010 年数一 4 分）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（　　）.

A. $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.　　B. $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.

C. $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.　　D. $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.

答案　D.

解　令 $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$,

将 σ_n 视为二重积分的一个积分和, 记 D 是正方形区域:

$$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},\quad f(x,y)=\frac{1}{(1+x)(1+y^2)},$$

将 D 的长与宽均 n 等分, 分成 n^2 个小正方形, 每个正方形的面积是 $\dfrac{1}{n^2}$, 于是 σ_n 是 $f(x,y)$ 在 D 上的一个积分和

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{n}\right)\left[1+\left(\dfrac{j}{n}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y^2)}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.$$

故选 D.

19.（2008 年数一 4 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & |x|\leqslant c\\ \dfrac{2}{|x|} & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 则 $c=$________.

答案　$c=1$.

解　$c>0$ 且 $c^2+1=\dfrac{2}{|c|}=\dfrac{2}{c}$, 即 $c^3+c-2=0$, $(c-1)(c^2+c+2)=0$,

又 $c^2+c+2>0$, 所以 $c=1$.

20.（2003 年数一 4 分）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$________.

答案　$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}\ln\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

21.（1997 年数一 3 分）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________ .

答案　$\dfrac{2}{3}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x}{x}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$.

22.（1999 年数一 3 分）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$ ________ .

答案　$\dfrac{1}{3}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

23.（2006 年数一 4 分）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ ______ .

答案　2.

解　由无穷小等价 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xx}{\dfrac{1}{2}x^2}=2$.

24.（2013 年数二 4 分）$\lim\limits_{x\to0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$ ______.

答案　$e^{\frac{1}{2}}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}{x}}$，用洛必达法则，原式$=e^{\frac{1}{2}}$.

25.（2000 年数一 5 分）求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解　令 $f(x)=\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$,

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-4/x}+e^{-3/x}}{e^{-4/x}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2+0}{1+0}-1=1,$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

26.（2003 年数二 10 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$.

问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 出连续；a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax^3}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a\arcsin^3 x}{x-\arcsin x}$

$$=\lim_{t\to 0^-}\frac{at^3}{\sin t-t}=-6a,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=4\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}=2a^2+4,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x),-6a=2a^2+4\text{ 得 }a=-1,a=-2,$$

当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

当 $a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=12\neq f(0)$，因而 $x=0$ 是可去间断点.

27.（2013 年数二 11 分）设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值；

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}<1$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求此极限.

解 (1) $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}=0\Rightarrow x=1$，易知最小值为 1.

(2) 由于 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\geqslant 1$，则 $\dfrac{1}{x_{n+1}}<\dfrac{1}{x_n}\Rightarrow x_{n+1}>x_n$，故 x_n 单调递增，

又由于 $\ln x_n<\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}<1\Rightarrow x_n<e\Rightarrow x_n$ 有上界. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Rightarrow \ln a+\dfrac{1}{a}\leqslant 1\Rightarrow a=1$.

28.（1998 年数一 6 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\dfrac{\sin\frac{3\pi}{n}}{n+\frac{1}{3}}+\cdots\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

解 令 $x_n=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\dfrac{\sin\frac{3\pi}{n}}{n+\frac{1}{3}}+\cdots\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$，

$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$，而 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$，

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\text{，所以}\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{\pi}.$$

29.（2006 年数二 10 分）试确定 A,B,C 的值，使得 $\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

解　由题意有

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{(1+Bx+Cx^2)-\mathrm{e}^{-x}(1+Ax)}{x^3}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{B+2Cx+\mathrm{e}^{-x}\left[(1-A)+Ax\right]}{3x^2},$$

$$\Rightarrow 1+B-A=0\text{；}I=\lim_{x\to 0}\frac{2C+\mathrm{e}^{-x}(2A-1-Ax)}{6x}\Rightarrow 2A+2C-1=0,$$

$$\Rightarrow I=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x}(1-3A+Ax)}{6}=\frac{1-3A}{6}=0\Rightarrow 1-3A=0,$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}.$$

30.（2002 年数二 6）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续导数且 $f(0)\neq 0,f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$，在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，求 a,b 的值.

解　由题意 $\lim\limits_{h\to 0}\left[af(h)+bf(2h)-f(0)\right]=(a+b-1)f(0)=0$，由 $f(0)\neq 0$，

故必有 $a+b-1=0$.

又由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}$

$$=(a+2b)f'(0)=0\Rightarrow a+2b=0\quad a=2,b=-1.$$

第二部分　一元函数微分学

一、重点内容提示

在历年考研试题中，一元函数微分学约占微积分分数的五分之一. 考题的内容归纳起来，有以下四大部分:

1. 概念部分: 导数和微分的定义（特别要会利用导数定义讨论分段函数在分界点的可导性），高阶导数，可导与连续的关系.

2. 运算部分: 基本初等函数的导数与微分公式，导数的四则运算，反函数，复合函数，隐函数，参数方程的求导公式.

3. 理论部分: 罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理与泰勒定理.

4. 应用部分: 利用导数研究函数的性态（包括函数的单调性与极值，函数图形的凹凸性与拐点，渐近线），最值应用题以及导数在几何、经济等方面的应用（切线问题，边际与弹性等）.

二、考研部分试题及答案

1.（2000 年数三 3 分）设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在该点处不可导的充分条件是（　　）.

A. $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$.　　　　B. $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$.

C. $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$.　　　　D. $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$..

答案　B.

解　因为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，故 $f(x)$ 必在点 $x=a$ 处连续，所以，当 $f(a)\neq 0$ 时，存在点 $x=a$ 的一个邻域，使 $f(x)$ 在该邻域与 $f(a)$ 同号，从而在该邻域内 $|f(x)|$ 或恒等于 $f(x)$ 或恒等于 $-f(x)$，即 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导，所以 C, D 不对.

对于 A，举例 $f(x)=x^2$，$a=0, f(x)$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$，但 $|f(x)|=f(x)=x^2$ 在点 $x=0$ 处可导，所以 A 不对，选 B.

2.（2006 年数三 4 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则（　　）.

A. $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在.　　　　B. $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在.

C. $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在.　　　　D. $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

答案　C.

解　设 $x=h^2$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$\Rightarrow f(0+0)=0$，由连续得

$f(0)=f(0+0)=0$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$，选 C.

3.（2007 年数三 4 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是（　　）.

A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$ 存在.

答案　D.

解　由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可知 $f(-x)$ 在 $x=0$ 也连续，利用极限四则运算

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}x=0$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，所以 A, B, C 都对，选 D. 例如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$

4.（1996 年数二 3 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的（　　）.

A. 间断点.

B. 连续而不可导的点.

C. 可导点，且 $f'(0)=0$.

D. 可导点，且 $f'(0)\neq 0$.

答案　C.

解　当 $x=0$ 时，由 $|f(0)|\leqslant 0\Rightarrow f(0)=0$ 得 $0\leqslant\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right|\leqslant\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^2}{x}\right|=|x|$，

由夹逼准则有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$，故选 C.

5.（2003 年数四 4 分）设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的（　　）.

A. 充分必要条件.

B. 必要但非充分条件.

C. 充分但非必要条件.

D. 既非充分也非必要条件.

答案　A.

解　$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x^3-1)\phi(x)}{x-1}=-\varphi(1)\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x+1)=-\varphi(1)$，

同理有 $f_+'(1)=3\varphi(1)$，

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导 $\Leftrightarrow$ $f_-'(1)$ 与 $f_+'(1)$ 存在且相等 $\Leftrightarrow -\phi(1)=3\phi(1)\Leftrightarrow\phi(1)=0$，选 A.

6.（2004 年数二 4 分）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得（　　）.

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

B. $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

C. 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

D. 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

答案　C.

解　$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0\Rightarrow\exists\delta>0$，当 $x\in(-\delta,\delta)$ 且 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0\Rightarrow$ 当 $x\in(0,\delta)$ 时 $f(x)-f(0)>0$，当 $x\in(-\delta,0)$ 时 $f(x)-f(0)<0$，故选 C.

7.（1999 年数二 3 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, x>0\\ x^2g(x),\ x\leqslant 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，$f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）.

A. 极限不存在.　　B. 极限存在但不连续.

C. 连续但不可导　　D. 可导.

答案　D.

解　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=0=f(0),\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=0$，$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}xg(x)=0$，

$f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)=0$，故选 D.

8.（2005 年数二 4 分）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（　　）.

A. 处处可导.　　B. 恰有一个不可导点.

C. 恰有两个不可导点.　　D. 至少有三个不可导点.

答案　C.

解　先求 $f(x)$ 的表达式.

当 $|x|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+|x|^{3n})^{\frac{1}{n}}=1^0=1$，

当 $|x|=1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1)^{\frac{1}{n}}=2^0=1$，

当 $|x|>1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=|x|^3\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{|x|^{3n}}\right)^{\frac{1}{n}}=|x|^3$，

因此，$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant1\\ |x|^3 & |x|>1\end{cases}$，易知 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处不可导.

9.（1998 年数三 3 分）设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(5,f(5))$ 点处的切线斜率为（　　）.

A. $\dfrac{1}{2}$.　　B. 0.　　C. -1.　　D. -2.

答案　D.

解　$f(x)=f(x+4)\Rightarrow f'(x)=f'(x+4)\Rightarrow f'(5)=f'(1)$，

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{x\to0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x},$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-2.$$

所以 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为 $f'(5)=-2$，故选 D.

10.（1997 年数三 3 分）若 $f(-x)=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0,f''(0)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有（　　）.

A. $f'(x)>0,f''(0)<0$.　　B. $f'(x)>0,f''(0)>0$.

C. $f'(x)<0,f''(0)<0$.　　D. $f'(x)<0,f''(0)>0$.

答案　C.

解　由题设 $f(x)$ 是二阶可导的偶函数，所以 $f'(x)$ 为奇函数，$f''(x)$ 为偶函数，因为在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0,f''(x)<0$，故在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)<0,f''(x)<0$，故选 C.

11.（2001 年数三 3 分）设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则（　　）.

A. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

B. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

C. $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

D. $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

答案　B.

解　$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f'(x)}{x-a}(x-a)\right]=(-1)\cdot 0=0=f'(a)$，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$ 及保号性知，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $\dfrac{f'(x)}{x-a}<0$，从而当 $x\in(x-a,a)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，又 $f'(a)=0$，故 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

12.（2005 年数三 4 分）当 a 取下列哪个值时，$f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点.

A. 2.　　　B. 4.　　　C. 6.　　　D. 8.

答案　B.

解　画草图，找极大值与极小值.

13.（2000 年数二 3 分）设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则（　　）.

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

C. 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

答案　C.

解　方程 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$ 两端对 x 求导后，令 $x=0$ 可得 $f'''(0)=1\neq 0$，又 $f''(0)=0$，所以点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 故选 C.

14.（2010 年数三 4 分）若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$____.

答案　3.

解　点 $(-1,0)$ 在曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 上，所以有 $a-b=0$，

$$y'=3x^2+2ax+b,\quad y''=6x+2a,$$

$$y''(-1)=0\Rightarrow a=3\Rightarrow b=3.$$

15.（2001 年数二 3 分）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为____________.

答案　$x-2y+2=0$.

解　方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 两端对 x 求导得 $e^{2x+y}(2+y')+\sin xy(y+xy')=0$，由 $y(0)=1$ 得 $y'(0)=-2$，易得法线方程为 $x-2y+2=0$.

16.（2003 年数二 4 分）$y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是____.

答案　$a_n=\dfrac{\ln^n 2}{n!}$.

解　由 $y=2^x=e^{x\ln 2}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(x\ln 2)^k}{k!}+o(x^n)$，即得 x^n 项的系数 $a_n=\dfrac{\ln^n 2}{n!}$.

17.（2002 年数一 3 分）已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$____.

答案 -2.

解 方程两端对 x 两次求导得

$$\mathrm{e}^y y'+6xy'+6y+2x=0,$$

$$\mathrm{e}^y y''+\mathrm{e}^y y'^2+6xy''+12y'+2=0,$$

由已知 $y(0)=0\Rightarrow y''(0)=-2$.

18.（2013 年数一 4 分）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=$________.

答案 1.

解 由已知可得，$f(0)=1$，$f'(0)=1$.

又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1}{\dfrac{1}{n}}=f'(0)$.

19.（2010 年数一 4 分）设 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-t}\\ y=\displaystyle\int_0^t\ln(1+u^2)\mathrm{d}u\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$____.

答案 0.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\mathrm{e}^t\ln(1+t^2)$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left[-\mathrm{e}^t\ln(1+t^2)-\dfrac{2t\mathrm{e}^t}{1+t^2}\right](-\mathrm{e}^t)\Rightarrow\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=0$.

20. （2013 年数一 4 分）设 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$（$t$ 为参数），则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$____.

答案 $\sqrt{2}$.

解 略.

21.（2013 年数二 4 分）设函数 $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^x\sqrt{1-\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=$____.

答案 $\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}}$.

解 由 $y=0\Rightarrow x=-1$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}}$.

22.（2007 年数一 11 分）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相同的最大值，$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$，证明：存在 $\zeta\in(a,b)$ 使 $f''(\zeta)=g''(\zeta)$.

证明 令 $F(x)=f(x)-g(x)$，$\exists x_1\in(a,b)$，$M=\max\limits_{[a,b]}f(x)=f(x_1)$，$\exists x_2\in(a,b)$，$M=\max\limits_{[a,b]}g(x)=g(x_2)$，若 $x_1=x_2$，取 $c=x_1=x_2$，$F(c)=0$，若 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geqslant 0,F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leqslant 0\Rightarrow\exists c\in[x_1,x_2],F(c)=0$.

由 $F(a)=F(c)=F(b)$，由罗尔定理 $\Rightarrow \zeta_1\in(a,c),\zeta_2\in(c,b)$ 使 $F'(\zeta_1)=F'(\zeta_2)=0$，再由罗尔定理 $\exists\zeta\in(\zeta_1,\zeta_2)\subset(a,b)$ 使 $F''(\zeta)=0\Rightarrow f''(\zeta)=g''(\zeta)$.

23.（1995 年数一 8 分）假设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且 $g''(x)\neq 0$, $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明:

(1) 在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$；

(2) 在 (a,b) 内至少存在一点 ζ，使 $\dfrac{f(\zeta)}{g(\zeta)}=\dfrac{f''(\zeta)}{g''(\zeta)}$.

证明 略.

提示: 由罗尔定理 (1) 反证法; (2) 令 $\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$.

24.（2003 年数二 12 分）讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

解 即讨论 $\varphi(x)=\ln^4 x-4\ln x+4x-k$ 在 $(0,+\infty)$ 有几个零点.

$\varphi'(x)=\dfrac{4}{x}(\ln^3 x-1+x)$，$x=1$ 是驻点，而且，当 $0<x<1$ 时 $\varphi'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$.

由此 $x=1$ 是最小值点. $\varphi(1)=4-k$ 是 $\varphi(x)$ 的最小值.

当 $\varphi(1)>0$，即 $k<4$ 时，$\varphi(x)\geqslant\varphi(1)>0$，$\varphi(x)$ 没有零点,

当 $\varphi(1)=0$，即 $k=4$ 时，$\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=0$，$\varphi(x)$ 有唯一零点,

当 $\varphi(1)<0$，即 $k>4$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$，故有两个零点.

综上所述，略.

25.（2003 年数三 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(3)=1$，$f(0)+f(1)+f(2)=3$，试证必存在 $\zeta\in(0,3)$ 使 $f'(\zeta)=0$.

证明 因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以在 $[0,2]$ 上连续，存在最大值 M 与最小值 m,

$$\therefore\ m\leqslant f(0)\leqslant M,m\leqslant f(1)\leqslant M,m\leqslant f(2)\leqslant M,\Rightarrow m\leq\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1\leqslant M$$

由介值定理存在 $\eta\in[0,2]$，使 $f(\eta)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$,

因为 $f(\eta)=f(3)=1$，由罗尔定理 $\exists\zeta\in(\eta,3)\in(0,3)$ 使 $f'(\zeta)=0$.

26.（2010 年数三 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内二阶可导，且

$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3)$.

(1) 证明存在 $\eta\in(0,2)$，使 $f(\eta)=f(0)$；

(2) 证明存在 $\zeta\in(0,3)$，使 $f''(\zeta)=0$.

证明 (1) $f(0)=\dfrac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，由积分中值定理 $\exists\eta\in(0,2),f(\eta)=\dfrac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，即 $f(\eta)=f(0)$；

(2) $f(0)=\dfrac{1}{2}\left[f(2)+f(3)\right]$，可知当 $f(2)=f(3)$ 时必有 $f(0)=f(2)=f(3)$；当 $f(2)\neq f(3)$ 时由闭区间上连续函数性质可知，$\exists\overline{\eta}\in(2,3)$ 使得 $f(\overline{\eta})=\dfrac{1}{2}\left[f(2)+f(3)\right]=f(0)$，再由罗尔定理即证（略）.

27.（1998 年数二 8 分）设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的非负连续函数.

(1) 证明存在 $x_0\in(0,1)$ 使得在区间 $\left[0,x_0\right]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于在区间 $\left[x_0,1\right]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积;

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$. 证明(1)的 x_0 是唯一的.

证明 (1) 令 $\varphi(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$,

$\psi(x)=\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t;\psi(0)=0,\psi(1)=\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\int_0^1\left[\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\left[x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\Big|_{x=0}^{x=1}+\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right]=0$$

由罗尔定理知 $\exists x_0\in\left(0,1\right)$, 使 $\psi'\left(x_0\right)=\varphi\left(x_0\right)=0$.

(2) 由 $\varphi'(x)=xf'(x)+f(x)+f(x)=xf'(x)+2f(x)>0$ 知 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增, 故(1)中的 x_0 是唯一的.

28.（1998 年数四 6 分）设 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=1$, 试证明存在 $\zeta,\eta\in(a,b)$, 使得 $\mathrm{e}^{\eta-\zeta}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$.

证明 $\mathrm{e}^x f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由拉格朗日中值定理知: 存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 $\mathrm{e}^\eta\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=\dfrac{\mathrm{e}^b f(b)-\mathrm{e}^a f(a)}{b-a}=\dfrac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}$, 对函数 $g(x)=\mathrm{e}^x$ 使用拉格朗日中值定理 $\dfrac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}=\mathrm{e}^\zeta$, 易知结论成立.

29.（1999 年数二 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $\left[-1,1\right]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0, f(1)=1,\ f'(0)=0$, 证明在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ζ, 使 $f'''(\zeta)=3$.

证明 由泰勒公式 $f(x)=f(0)+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(\eta)}{3!}x^3$, η 在 x 与 0 之间.

令 $x=\pm1$ 时有

$$1=f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(\eta_1)}{3!},(0<\eta_1<1),$$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}-\frac{f'''(0)}{3!},(-1<\eta_2<0),$$

相减有 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$, 由于 $f'''(x)$ 连续, 存在最大值 M 与最小值 m, 所以 $m\leqslant\dfrac{1}{2}\left[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)\right]=3\leqslant M$. 由介值定理知, $\exists\zeta\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$, 使得

$f'''(\zeta)=\dfrac{1}{2}\left[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6\right]=3$.

30.（2001 年数二 8 分）设 $f(x)$ 在 $[-a,a],(a>0)$ 上具有二阶连续导数, $f(0)=0$.

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳琳公式;

(2) 证明在 $[-a,a],(a>0)$ 上至少存在一点 η 使 $a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$.

解 (1) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\zeta)}{2!}x^2=f'(0)x+\dfrac{f''(\zeta)}{2!}x^2$, 其中 ζ 在 0 与 x 之间, $(\forall x\in[-a,a])$.

证明 (2) 对上式积分

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a} f'(0)x\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{2!}f''(\zeta)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2 f''(\zeta)\mathrm{d}x,$$

设 m,M 分别为 $f''(x)$ 在 $[-a,a],(a>0)$ 上的最大值与最小值,

由 $f''(x)$ 的连续性 $mx^2\leqslant x^2f''(\zeta)\leqslant Mx^2\Rightarrow m\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^{a}x^2f''(\zeta)\mathrm{d}x\leqslant M\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\Rightarrow m\leqslant$

$\dfrac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$，由介值定理知

$$\exists\eta\in[-a,a]\text{ 使 }f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$$

31.（2007 年数三 11 分）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a),f(b)=g(b)$.

证明: (1)存在 $\eta\in(a,b)$, 使得 $f(\eta)=g(\eta)$; (2) 存在 $\zeta\in(a,b)$, 使得 $f''(\zeta)=g''(\zeta)$.

证明 (1) 若在同一点 $c\in(a,b)$ 取得最大值，则 $f(c)=g(c)$，取 c 作为 η 即可.

若在不同点 $x=c,x=d$ 处分别取最大值，不妨设 $f(c)$ 为 $f(x)$ 的最大值，$g(d)$ 为 $g(x)$ 的最大值，且 $a<c<d<b$，则 $f(c)>g(c),f(d)<g(d)$.

设 $F(x)=f(x)-g(x)$ 连续，且 $F(c)>0>F(d)$，又由零点定理，存在 $\eta\in(c,d)\subset(a,b)$ 使得 $F(\eta)=0$，即 $f(\eta)=g(\eta)$.

(2) 设 $F(x)=f(x)-g(x)$，在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，再由 $F(a)=F(\eta)=F(b)=0$，分别在 $[a,\eta],[\eta,b]$ 使用罗尔定理，存在 $\alpha\in(a,\eta),\beta\in(\eta,b)$ 使 $F'(\alpha)=F'(\beta)=0$，再由罗尔定理 $\exists\zeta\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$, 使 $F''(\zeta)=0$，即 $f''(\zeta)=g''(\zeta)$.

32.（2013 数一、数二 10 分）设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，

证明: (1) 存在 $\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\zeta)=1$； (2) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

证明 (1) 设 $F(x)=f(x)-x$，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，所以 $F(0)=F(1)$，由罗尔定理即证.

(2) 提示: $F(x)=f'(x)+f(x)-x$，注意 $f'(-x)=f'(x)$.

33.（2004 年数二 4 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为__________.

解 先求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，再求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=1-\frac{2}{t^2+1},\quad\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}<0,(t<0),$$

而 $t<0$ 对应于 $x<1$，因此 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为 $(-\infty,1)$ 或 $(-\infty,1]$.

第三部分　一元函数积分学

一、重点内容提示

1. 概念部分: 原函数的概念, 不定积分, 定积分的概念, 以及反常积分的概念.
2. 运算部分: 变上限积分及导数, 不定积分与定积分的计算（重点是换元积分法和分部积分法）.
3. 理论部分: 变上限积分及求导定理, 牛顿-莱布尼兹公式, 积分中值定理.
4. 应用部分: 定积分在几何及物理上的应用.
5. 综合题: 积分与微分, 积分与微分方程, 积分与级数等综合性试题.

二、考研部分试题及答案

1.（1999 年数三 3 分）设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则（　　）.

A. 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数.

B. 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数.

C. 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必为周期函数.

D. 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必为单调增函数.

答案　A.

注: 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x)$ 是偶函数充要条件 $f(x)$ 是奇函数.

证明　“$\Leftarrow$” $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+C$, $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C \overset{t=-s}{=} \int_0^x -f(-s)\mathrm{d}s+C$

$$=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+C=F(x),\ （f(x) 为奇函数）.$$

“$\Rightarrow$” 设 $F(x)$ 是偶函数, 则

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C,\ F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C,$$

$\because F(-x)=F(x)\ \therefore \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$.

两端求导 $\Rightarrow f(-x)=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数.

2.(1999 年数三 3 分)设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t, g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$, 则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　).

A. 低阶无穷小.　　B. 高阶无穷小.　　C. 等价无穷小.　　D. 同阶但不等价无穷小.

答案　B.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t}{\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin(1-\cos x)^2}{x^4(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{4}x^5}{x^4}=0.$$

3.（1997 年数二 3 分）设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$，则 $F(x)$（　　）.

A. 为正常数.　　B. 为负常数.　　C. 恒为零.　　D. 不为常数.

答案　A.

解

$$F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t=-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}\cos t$$

$$=-\mathrm{e}^{\sin t}\cos t\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\cos^2 t\mathrm{d}t>0.$$

4.（2002 年数二 3 分）设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中必为偶函数的是（　　）.

A. $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$.　　B. $\int_0^x f^2(x)\mathrm{d}t$.

C. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$.　　D. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$.

答案　D.

解　$t[f(t)-f(-t)]$ 是奇函数，而“奇函数的任何原函数都是偶函数”.

5.（2005 年数四 4 分）设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）.

A. $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续.

B. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，在 $x=0$ 点不可导.

C. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且满足 $F'(x)=f(x)$.

D. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，但不一定满足 $F'(x)=f(x)$.

答案　B.

解　当 $x\geqslant0$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \mathrm{d}t=x$；当 $x<0$ 时，$F(x)=-x$，所以 $F(x)=|x|$.即 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，在 $x=0$ 点不可导.

6.（2013 年数一 4 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi\\ 2, & \pi\leqslant x<2\pi\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）.

A. $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点.　　B. $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

C. $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导.　　D. $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

答案　C.

解　与第 5 题类似.

7.（2001 年数三 3 分）设 $g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，其中 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1), & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{3}(x-1), & 1\leqslant x\leqslant2\end{cases}$ 则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内（　　）.

A. 无界.　　B. 递减.　　C. 不连续.　　D. 连续.

答案　D.

解　提示: 易求 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}x^3+x\right), & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}x^2-x\right)+\dfrac{5}{6}, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$.

8.（2005 年数四 4 分）下列结论正确的是（　　）.

A. $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 都收敛.　　B. $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 都发散.

C. $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 发散, $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 收敛.　　D. $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 收敛, $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 发散.

答案　D.

解　$x>0, \int\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}=\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\ln x-\ln(x+1)+c=\ln\dfrac{x}{1+x}+c$,

$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}=\ln\dfrac{x}{x+1}\Big|_1^{+\infty}=-\ln\dfrac{1}{2}=\ln 2$, 即收敛, $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}=\infty$ 发散.

9.（1997 年数三 3 分）若 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$________.

答案　$\dfrac{\pi}{4-\pi}$.

解　令$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$, 对$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$两边从0到1做定积分得, $A=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+A\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}A\Rightarrow A=\dfrac{\pi}{4-\pi}$.

10.（2006 年数四 4 分）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(x)\leqslant g(x)$, 则对任何 $c\in(0,1)$,（　　）.

A. $\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)\mathrm{d}t$.　　B. $\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)\mathrm{d}t$.

C. $\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_c^1 g(t)\mathrm{d}t$.　　D. $\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_c^1 g(t)\mathrm{d}t$.

答案　D.

解　由定积分的性质应选 D.

11.（2004 年数一 4 分）设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(2)$ 等于（　　）.

A. $2f(2)$　　B. $f(2)$　　C. $-f(2)$　　D. 0

答案　B.

解　交换积分次序,

$$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}x\int_1^x f(x)\mathrm{d}y=\int_1^t(x-1)f(x)\mathrm{d}x,$$

$F'(t)=(t-1)f(t)$, $F'(2)=f(2)$, 故选 B.

12.（2004 年数一 4 分）设 $f(x)$ 有连续导数, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$, $F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$, 且当 $x\to 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 k 等于（　　）.

A. 1 .　　B. 2 .　　C. 3 .　　D. 4.

答案　C.

解　$F(x)=x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t$，$F'(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2 f(x)-x^2 f(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，用洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}=f'(0)\neq 0\ （当 k=3 时）.$$

故选 C.

13.（2012 年数一 4 分）设 $I_k=\int_0^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x\ (k=1,2,3)$，则有（　　）.

A. $I_1<I_2<I_3$.　　　　B. $I_3<I_2<I_1$.

C. $I_2<I_3<I_1$.　　　　D. $I_2<I_1<I_3$.

答案　D.

解　由于 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$\sin x<0$，可知 $\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x<0$，即 $I_2-I_1<0$，可知 $I_1>I_2$．又由于 $\int_\pi^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$，对 $\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$ 做变量代换 $t=x-\pi$，

$\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{(t+\pi)^2}\sin(t+\pi)\mathrm{d}t=-\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{(t+\pi)^2}\sin t\mathrm{d}t=-\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{(x+\pi)^2}\sin x\mathrm{d}x$，

故 $\int_\pi^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_\pi^{2\pi}(\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{(x+\pi)^2})\sin x\mathrm{d}x$，由于 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$\sin x<0,\ \mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{(x+\pi)^2}<0$，可知 $\int_\pi^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x>0$，即 $I_3-I_1>0$，可知 $I_3>I_1$.

综上所述有 $I_2<I_1<I_3$，故选 D.

14.（2012 年数一 4 分）$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$ ________.

答案　$\dfrac{\pi}{2}$

解　令 $t=x-1$ 得，$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(t+1)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2}$.

15.（2010 年数三 4 分）设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}t$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ______.

答案　-1.

解　方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=x\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t$ 两端对 x 求导，

$$\mathrm{e}^{-(x+y)^2}\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t+x\sin x^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{(x+y)^2}\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t+x\mathrm{e}^{(x+y)^2}\sin x^2-1\quad，令\ x=0,\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-1.$$

16.（2000 年数三 3 分）$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}=$ ______.

答案 $\dfrac{\pi}{4\mathrm{e}}$.

解 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\arctan\mathrm{e}^{b-1}-\frac{1}{\mathrm{e}}\arctan 1\right)=\frac{\pi}{4\mathrm{e}}$.

17.（2013 年数三 3 分）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$_____.

答案 $\ln 2$.

解 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)x}=0+\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=0-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$.

18.（2010 年数三 4 分）设位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$ $(\mathrm{e}\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所的空间区域的体积为______.

答案 $\dfrac{\pi^2}{4}$.

解 $\displaystyle v=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}y^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}=\frac{\pi^2}{4}$.

19.（1999 年数一 3 分）$\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t=$__________.

答案 $\sin x^2$.

解 $\displaystyle\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t\overset{u=x-t}{=}\int_x^0-\sin u^2\mathrm{d}u=\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u\right)=\sin x^2.$$

20.（2004 年数三 4 分）设 $f(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -1, & x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 则 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1)\mathrm{d}x=$______.

答案 $-\dfrac{1}{2}$.

解 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1)\mathrm{d}x\overset{x-1=t}{=\!=}\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}t=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

21.（2008 年数三 4 分）设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$，则 $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x=$______.

答案 $\dfrac{\ln 3}{2}$.

解 设 $t=x+\dfrac{1}{x}$，$f(t)=f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{1+x^4}=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2}=\dfrac{t}{t^2-2}$

$$\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{x}{x^2-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2-2)\Big|_2^{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln 3.$$

22.（2013 年数一 10 分）计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，其中 $\displaystyle f(x)=\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$.

解 使用分部和换元积分法,

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 f'(x)\sqrt{x}\mathrm{d}x\ -2\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$= -4\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}\sqrt{x} = -4\ln(1+x)\sqrt{x}\Big|_0^1 + 4\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}\ln(1+x)\,,$$

$$= -4\ln 2 + 4\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x = -4\ln 2 + 8 - 2\pi\,.$$

23.(2013 年数三 10 分)设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x = a\ (a>0)$ 及 x 轴所围城的平面图形，V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，且 $510V_x = V_y$，求 a 的值.

解 $V_x = \pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$，$V_y = \pi a^2 a^{\frac{1}{3}} - \pi\int_0^{a^{\frac{1}{3}}} y^6\mathrm{d}y$，由 $510V_x = V_y \Rightarrow a = 7\sqrt{7}$.

24.（1997 年数三 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，单调不减且 $f(0)\geqslant 0$，证明

函数 $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调不减（其中 $n>0$）.

证明 显然 $x>0$ 时，$F(x)$ 连续，又 $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^n f(x) = 0 = F(0)$，所以 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$F'(x) = \frac{x^{n+1}f(x) - \int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t}{x^2} = \frac{x^{n+1}f(x) - \zeta^n f(\zeta)x}{x^2}, 0<\zeta<x.$

由于 $f(x)$ 单调不减，故 $f(x)\geqslant f(\zeta)$, 又 $x^n > \zeta^n$，从而 $x^n f(x)\geqslant \zeta^n f(\zeta)$.

所以 $F'(x)\geqslant 0\ \ (0<x<+\infty)$，故 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调不减.

25.（1999 年数三 6 分）设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan x^2$，已知 $f(1)=1$, 求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解 设 $u = 2x - t$，则

$$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t = -\int_{2x}^x (2x-u)f(u)\mathrm{d}u = 2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - \int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u$$

即
$$2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - \int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\arctan x^2\,,$$

两端求导，$2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u = \frac{x}{1+x^2} + xf(x)$，令 $x=1$ 得 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}$.

26.（2002 年数三 5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x^3}$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{3x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{6x}=\frac{\pi}{6}.$$

27.（2001 年数四 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，$f(1)=\frac{5}{2}$，且对所有 $x,t\in(0,+\infty)$ 满足条件 $\int_1^{xt}f(u)\mathrm{d}u=t\int_1^x f(u)\mathrm{d}u+x\int_1^t f(u)\mathrm{d}u$，求 $f(x)$.

解 两端对 x 求导，$tf(xt)=tf(x)+\int_1^t f(u)\mathrm{d}u$，

令 $x=1$，$tf(t)=\frac{5}{2}t+\int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u\Rightarrow f(t)+tf'(t)=\frac{5}{2}+f(t)\Rightarrow f'(t)=\frac{5}{2t}$，$f(t)=\frac{5}{2}\ln t+c$.

由 $f(1)=\frac{5}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{5}{2}(\ln x+1)$.

28.（1997 年数二 8 分）设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$，求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性（A 为常数）.

解 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t\overset{u=xt}{=}\int_0^x f(u)\frac{1}{x}\mathrm{d}u=\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}$，

$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$，由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$，

$\varphi(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=0$，$\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$.

又 $\lim\limits_{x\to0}\phi'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0)$，
所以 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

29.（2000 年数三 6 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0,\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$，试证在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ζ_1,ζ_2 使 $f(\zeta_1)=f(\zeta_2)=0$.

证明 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$0\leqslant x\leqslant\pi$，则 $F(0)=F(\pi)=0$，

考察 $0=\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}F(x)=F(x)\cos x\big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x$

$$=\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x=\pi F(\eta)\sin\eta,0<\eta<\pi\Rightarrow F(\eta)=0.$$

再由罗尔定理，$\exists\zeta_1\in(0,\eta),\zeta_2\in(\eta,\pi)$ 使 $F'(\zeta_1)=F'(\zeta_2)=0\Rightarrow f(\zeta_1)=f(\zeta_2)=0$.

30.（2001 年数三 6 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\quad(k>1).$$

证明：至少存在一点 $\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\zeta)=(1-\zeta^{-1})f(\zeta)$.

证明 令 $F(x)=x\mathrm{e}^{1-x}f(x)$，$F(1)=f(1)$，由积分中值定理，存在满足 $0<c<\frac{1}{k}<1$ 的 c，使得

$k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x} f(x)\mathrm{d}x = c\mathrm{e}^{1-c} f(c) = F(c) = F(1)$，从而 $F(x)$ 在 $[c,1]$ 上满足罗尔定理条件，故存在 $\zeta \in (c,1) \subset (0,1)$，使 $F'(\zeta) = 0$，即 $\zeta\mathrm{e}^{1-\zeta}\left[f'(\zeta) - (1-\zeta^{-1})f(\zeta)\right] = 0$，而 $\zeta\mathrm{e}^{1-\zeta} \neq 0$，所以 $f'(\zeta) = (1-\zeta^{-1})f(\zeta)$.

31.（2012 年数二 11 分）过点(0, 1)作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 及 x 轴围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解　画草图，设切点坐标为 $A(x_0, \ln x_0)$，斜率为 $\dfrac{1}{x_0}$，所以切线方程为 $y - \ln x_0 = \dfrac{1}{x_0}(x - x_0)$，又因为该切线过 $B(0,1)$，所以 $x_0 = \mathrm{e}^2$，故切线方程为 $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}x + 1$，切线与 x 轴交点为 $B(-\mathrm{e}^2, 0)$.

(1) $A = \int_0^2 \left[\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^2(y-1)\right]\mathrm{d}y = \left[\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^2\left(\dfrac{1}{2}y^2 - y\right)\right]_0^2 = \mathrm{e}^2 - 1$.

(2) $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot \left[\mathrm{e}^2 - (-\mathrm{e}^2)\right] - \pi\int_1^{\mathrm{e}^2} \ln^2 x\mathrm{d}x = \dfrac{8}{3}\pi\mathrm{e}^2 - \pi\left[(x\ln^2 x)\Big|_1^{\mathrm{e}^2} - \int_1^{\mathrm{e}^2} 2\ln x\mathrm{d}x\right]$

$$= \frac{8}{3}\pi\mathrm{e}^2 - \pi\left[4\mathrm{e}^2 - (2x\ln x)\Big|_1^{\mathrm{e}^2} - \int_1^{\mathrm{e}^2} 2\mathrm{d}x\right] = \frac{8}{3}\pi\mathrm{e}^2 - 2\pi(\mathrm{e}^2 - 1) = \frac{2}{3}\pi\mathrm{e}^2 + 2\pi.$$

第四部分　常微分方程

一、重点内容提示

微分方程问题是积分问题的延伸，有着极为广泛的应用，在历年的考研试题中必定出现. 微分方程部分要掌握三个方面的内容:

1. 要能识别并会解一阶微分方程的可解类型与二阶微分方程的可降阶的类型;
2. 要知道高阶（主要是二阶）线性微分方程解的性质，并会求常系数的线性方程的解;
3. 要注意微分方程的应用问题.

历年来常微分方程的试题可归纳成如下题型:

1. 一阶微分方程的可解类型;
2. 二阶微分方程的可降阶类型;
3. 二阶线性微分方程;
4. 求解含变限积分方程;
5. 应用问题;
6. 高于二阶的线性常系数齐次微分方程的求解.

二、考研部分试题及答案

1.（2004 数二 4 分）微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为（　　）.

A. $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.　B. $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.

C. $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$.　D. $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$.

答案　A.

解　齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，其根为 $\lambda=\pm\mathrm{i}$.

由叠加原理，分别考察

$$y''+y=x^2+1 \tag{1}$$

$$y''+y=\sin x \tag{2}$$

方程(1)有特解 $y^*=ax^2+bx+c$，

方程(2)的非齐次项 $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x=\sin x(\alpha=0,\beta=1)$，$\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ 是特征根，它有特解 $y^*=x(A\sin x+B\cos x)$，故原方程有特解 $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.

2.（2008 年数一 4 分）在下列微分方程中，以 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x$（$c_1,c_2,c_3$ 为常数）为通解的是（　　）.

A. $y'''+y''-4y'-4y=0$.　B. $y'''+y''+4y'+4y=0$.

C. $y'''-y''-4y'+4y=0$.　D. $y'''-y''+4y'-4y=0$.

答案　D.

解　$1,\pm2\mathrm{i}$ 为特征根，特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)=\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0$，

因而所求方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$. 选 D.

3.（2000 年数二 3 分）具有特解 $y_1=\mathrm{e}^{-x}, y=2x\mathrm{e}^{-x}, y_3=3\mathrm{e}^{x}$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是（　　）.

A. $y'''-y''-y'+y=0$.　　B. $y'''+y''-y'-y=0$.

C. $y'''-6y''+11y'-6y=0$.　　D. $y'''-2y''-y'+2y=0$.

答案　B.

解　由已知 $r_1=r_2=-1, r_3=1$，从而特征方程为 $(r+1)^2(r-1)=0$，所以微分方程为 $y'''+y''-y'-y=0$.

4.（1998 年数二 3 分）已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y}{1+x^2}\Delta x+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)$ 等于（　　）.

A. 2π.　　B. π.　　C. $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.　　D. $\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

答案　D.

解　由可微定义 $y'=\dfrac{y}{1+x^2}$，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，积分得 $y=c\mathrm{e}^{\arcsin x}$，由初始条件 $y(0)=\pi$，$y=\pi\mathrm{e}^{\arcsin x}$. 故选 D.

5.（2006 年数三 4 分）设非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x)$，c 为任意常数, 则该方程的通解为（　　）.

A. $c[y_1(x)-y_2(x)]$.　　B. $y_1(x)+c[y_1(x)-y_2(x)]$.

C. $c[y_1(x)+y_2(x)]$.　　D. $y_1(x)+c[y_1(x)+y_2(x)]$.

答案　B.

解　略.

6.（2007 年数三 4 分）微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$_______.

答案　$y=\dfrac{x}{\sqrt{1+\ln x}}$.

解　令 $u=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=xu\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 代入原方程, 并分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u^3}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow\dfrac{x^2}{y^2}=-\ln\dfrac{c}{x}$.

由已知 $c=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$y^2=\dfrac{x^2}{1+\ln x}\Rightarrow y=\pm\dfrac{x}{\sqrt{1+\ln x}}\Rightarrow y=\dfrac{x}{\sqrt{1+\ln x}}$.

7.（2007 年数学一 4 分）二阶常系数齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$__________.

答案　$y=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$.

解　特征方程 $\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$ 的根为 $\lambda=1,\lambda=3$，非齐次项 $\mathrm{e}^{\alpha x}$，$\alpha=2$ 不是特征根, 非齐次方程有特解 $y^*=A\mathrm{e}^{2x}$，代入方程得 $A=-2$，所以通解为 $y=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$.

8.（2013 数一 4 分）已知 $y_1=\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}, y_2=\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}, y_3=-x\mathrm{e}^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 则该微分方程的通解为__________.

答案　$y=c_1\mathrm{e}^{3x}+c_2\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^{2x}$.

解　略.

9.（2013 数三 4 分）微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为__________.

答案　$y=(c_1+c_2x)e^{\frac{1}{2}x}$.

解　略.

10.（2012 年数一 4 分）若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$__________.

答案　$f(x)=e^x$.

解　易得方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=c_1e^x+c_2e^{-2x}$，再由 $f''(x)+f(x)=2e^x$ 得 $f(x)=e^x$.

11.（2004 年数一 4 分）欧拉方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0\ (x>0)$ 的通解为________.

答案　$y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}$.

解　令 $x=e^t$，方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0\ (x>0)$ 变为 $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0\Rightarrow y=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$.

所以原方程的通解为 $y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}$.

12.（2012 年数二 4 分）微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为__________.

答案　$x=y^2$.

解　$ydx+(x-3y^2)dy=0\Rightarrow\frac{dx}{dy}=3y-\frac{1}{y}x\Rightarrow\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=3y$，为一阶线性微分方程，

所以　$x=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left[\int 3y\cdot e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right]=\frac{1}{y}\left[\int 3y^2dy+C\right]=(y^3+C)\frac{1}{y}$.

又因为 $y=1$ 时 $x=1$，解得 $C=0$，故 $x=y^2$.

13.（2005 年数一 4 分）微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解为________.

答案　$y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

解　$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\ln x$，这是一阶线性微分方程，由公式 $\Rightarrow y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

14.（2006 年数一 4 分）微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是__________.

答案　$y=cxe^{-x}$.

解　分离变量，$\frac{dy}{y}=\left(\frac{1}{x}-1\right)dx$，两端积分，$\ln y=\ln x-x+\ln c\Rightarrow y=cxe^{-x}$.

15.（2008 年数一 4 分）微分方程 $xy'+y=0$ 满足 $y(1)=1$ 的解是 $y=$__________.

答案　$y=\frac{1}{x}$.

解　分离变量，$\frac{dy}{dx}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow y=\frac{c}{x}\Rightarrow y=\frac{1}{x}$.

16.（2000 年数一 3 分）微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为__________.

答案 $y=\dfrac{c_2}{x^2}+c_1$.

解 令 $y'=p,y''=p'$，原方程化为 $p'+\dfrac{3}{x}p=0 \Rightarrow y=\dfrac{c_2}{x^2}+c_1$.

17.（2002 年数一 3 分）微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是______.

答案 $y=\sqrt{x+1}$.

解 令 $y'=p(y)$（以 y 为自变量），则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程得 $y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p=0$，分离变量得 $\Rightarrow p=\dfrac{c_1}{y}$；由 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$，$\Rightarrow y'=p=\dfrac{1}{2y} \Rightarrow y^2=x+c_2 \Rightarrow y=\sqrt{x+1}$.

18.（2001 年数一 3 分）设 $y=\mathrm{e}^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$（$c_1,c_2$ 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解, 则该方程为______.

答案 $y''-2y'+2y=0$.

解 由题意知 $r_1,r_2=1\pm \mathrm{i}$，$(r-r_1)(r-r_2)=r^2-(r_1+r_2)r+r_1r_2=0$，因此所求微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.

19.（1999 年数一 3 分）微分方程 $y''-4y'=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为______.

答案 $y=c_1\mathrm{e}^{2x}+c_2\mathrm{e}^{-2x}+\dfrac{x}{4}\mathrm{e}^{2x}$.

解 特征方程 $r^2-4=0$ 的两个根为 $r_1=2, r_2=-2$; 由非齐次项 $\mathrm{e}^{\alpha x}$，$\alpha=2=r_1$ 为单特征根, 所以特解设为 $Y=xa\mathrm{e}^{2x}$，代入方程得 $a=\dfrac{1}{4}$，故所求通解为 $y=c_1\mathrm{e}^{2x}+c_2\mathrm{e}^{-2x}+\dfrac{x}{4}\mathrm{e}^{2x}$.

20.（2009 年数一 4 分）若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(c_1+c_2x)\mathrm{e}^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为______.

答案 $y=-x\mathrm{e}^x+x+2$.

解 易知齐次方程为 $y''-2y'+y=0$，又非齐次方程 $y''-2y'+y=x$ 的特解为 $y^*=\alpha x+\beta$，代入 $y''-2y'+y=x \Rightarrow \alpha=1,\beta=2 \Rightarrow y=(c_1+c_2x)\mathrm{e}^x+x+2$，由初始条件 $y=-x\mathrm{e}^x+x+2$.

21.（2004 年数一 4 分）欧拉方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0\ \ (x>0)$ 的通解为______.

答案 $y=\dfrac{c_1}{x}+\dfrac{c_2}{x^2}$.

解 令 $x=\mathrm{e}^t$，把原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=0 \Rightarrow y=c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}$，所以通解为 $y=\dfrac{c_1}{x}+\dfrac{c_2}{x^2}$.

22.（2002 年数二 3 分）微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是______.

答案 $y=\sqrt{x+1}$.

解 令 $y'=p(y)$，$y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程得, $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0 \Rightarrow y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p=0$（或 $p=0$），分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}+\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=0 \Rightarrow p=\dfrac{c_1}{y}$（$p=0$ 对应 $c_1=0$），由初始条件易得 $y=\sqrt{x+1}$.

23.（2001 年数二 3 分）过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为______.

答案　$y=\dfrac{1}{\arcsin x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.

解　方程 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 变为 $y'+\dfrac{y}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{\arcsin x}$.

这是一阶线性方程，由公式得 $y=\dfrac{1}{\arcsin x}(c+x)$，由 $y\Big|_{x=\frac{1}{2}}=0\Rightarrow c=-\dfrac{1}{2}$，所求曲线方程为

$y=\dfrac{1}{\arcsin x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.

24.（2000 年数二 8 分）函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0.$$

(1) 求导数 $f'(x)$；(2) 证明当 $x\geqslant 0$ 时，不等式 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$ 成立.

解 (1) 变形后，求导得

$$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0$$

令 $u=f'(x)\Rightarrow u'+\dfrac{x+2}{x+1}u=0\Rightarrow f'(x)=u=c\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$，由 $f'(0)=-1$ 得 $c=-1\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$.

(2) 用单调性：由 $f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}<0(x\geqslant 0)$，$f(x)$ 单调减少，$f(x)\leqslant f(0)=1\ (x\geqslant 0)$；

由设 $\varphi(x)=f(x)-\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow\varphi'(x)=f'(x)+\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{x}{x+1}\mathrm{e}^{-x}\geqslant 0\ (x\geqslant 0)$，$\varphi(x)$ 单调增加，因而

$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$. 故原题得证.

25.（1996 年数一 7 分）设对任意 $x>0$，曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

解　曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$，令 $X=0\Rightarrow$

$Y=f(x)-f'(x)x$，由题意 $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)-xf'(x)$ 易得 $xf''(x)+f'(x)=0$，令

$y'=p,y''=p'\Rightarrow xp'+p=0\Rightarrow y'=p=\dfrac{c_1}{x}$，再积分得 $y=c_1\ln x+c_2$.

26.（2003 年数三 9 分）设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件：$f'(x)=g(x),g'(x)=f(x)$ 且 $f(0)=0,f(x)+g(x)=2\mathrm{e}^x$，

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程；(2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

解　(1) 由

$$\begin{aligned}F'(x)&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=g^2(x)+f^2(x)\\&=\left[f(x)+g(x)\right]^2-2f(x)g(x)=(2\mathrm{e}^x)^2-2F(x),\end{aligned}$$

即　$F'(x)+2F(x)=4\mathrm{e}^{2x}$.

(2) 这是一阶线性微分方程，易得 $F(x)=\mathrm{e}^{2x}+c\mathrm{e}^{-2x}$，

　由 $F(0)=f(0)g(0)=0,c=-1\Rightarrow F(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}$.

27.（1995 年数三 6 分）已知连续函数 $f(x)=\int_0^{3x}f\left(\dfrac{t}{3}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}$，求 $f(x)$.

解　两端求导有 $f'(x)=3f(x)+2\mathrm{e}^{2x}$，通解为 $f(x)=c\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$，由 $f(0)=1\Rightarrow c=3$，所求函数为 $f(x)=3\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$.

28.（1997 数三 6 分）设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程

$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $f(t)$.

解 由于 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t} f\left(\frac{r}{2}\right)r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{2t} rf\left(\frac{r}{2}\right)\mathrm{d}r$，

所以 $f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t} rf\left(\frac{r}{2}\right)\mathrm{d}r$，两端求导得

$$f'(t)=8\pi\mathrm{e}^{4\pi t^2}+8\pi tf(t)\Rightarrow f(t)=(4\pi t^2+c)\mathrm{e}^{4\pi t^2},$$

由 $f(0)=1\Rightarrow c=1\Rightarrow f(t)=(4\pi t^2+1)\mathrm{e}^{4\pi t^2}$.

29.（2009 年数三 10 分）设曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)>0$．已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$，$x=1$，$x=t$ $(t>1)$所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值，是该曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线方程.

解 由题意，$\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\pi t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x$，两边求导得

$$f^2(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x+tf(x),\quad f(1)=1,$$

再求导得 $2f(t)f'(t)=2f(t)+tf'(t)$，把 t 换成 x，$f(t)$ 换为 y，得 $(2y-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y$ 且 $y(1)=1$，

该方程改为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{x}{2y}=1\Rightarrow x=\frac{c}{\sqrt{y}}+\frac{2}{3}y\Rightarrow 3x=\frac{1}{\sqrt{y}}+2y$.

30.（2005 年数二 12 分）用变量代换 $x=\cos t$ $(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=2$ 的特解.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot(-\sin t)$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\sin^2 t-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cos t=(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，

于是原方程化为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=0$，其通解为 $y=c_1\cos t+c_2\sin t$，所以 $y=c_1x+c_2\sqrt{1-x^2}$，由 $y\big|_{x=0}=1\Rightarrow c_2=1$.

由 $y'(0)=c_1+\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\Big|_{x=0}=2\Rightarrow c_1=2\Rightarrow y=2x+\sqrt{1-x^2}$.

31.（1998 年数二 5 分）利用代换 $y=\frac{u}{\cos x}$ 将方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=\mathrm{e}^x$ 化简，并求出方程的通解.

解 $y=u\sec x$，则

$$y'=u'\sec x+u\sec x\tan x, y''=u''\sec x+2u'\sec x\tan x+u(\sec x\tan^2 x+\sec^3 x)$$

代入原方程 $u''+4u=\mathrm{e}^x\Rightarrow u=c_1c\cos 2x+c_2\sin x+\frac{1}{5}\mathrm{e}^x$．故原方程的通解为

$$y=c_1\frac{\cos 2x}{\cos x}+2c_2\sin x+\frac{\mathrm{e}^x}{5\cos x}.$$

32.（2007 年数二 10 分）求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

解 令 $p=y', y''=p'\Rightarrow\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p}=p$，

这是一阶线性方程，由公式得 $x=p(p+c)$，由初始值得 $x=p^2, p=\sqrt{x}$.

$y'=p=\sqrt{x}$， $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c_1$， $c_1=\dfrac{1}{3}$，所以 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}$.

33.（2001 年数二 7 分）一个半球体状的雪堆，其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，比例常数 $k>0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的 $7/8$，问雪堆全部融化需要多少小时?

解 设雪堆在时刻 t 的体积 $V=\dfrac{2}{3}\pi r^3$，侧面积 $S=2\pi r^2$. 由题意 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-ks$，即

$$2\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-k2\pi r^2\Rightarrow\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-k,\quad r=-kt+c,\ 由\ r\Big|_{t=0}=r_0\Rightarrow r=r_0-kt.$$

又 $V\Big|_{t=3}=\dfrac{1}{8}V\Big|_{t=0}$，即 $\dfrac{2}{3}\pi(r_0-3k)^3=\dfrac{1}{8}\dfrac{2}{3}\pi r_0^3$ ，故 $k=\dfrac{1}{6}r_0\Rightarrow r=\dfrac{r_0}{6}(6-t)$，令 $r=0$， $t=6$ 小时.

第　三　篇

《高等数学（上册）》期末考试

试卷选编及参考答案

高等数学（上）期末考试试卷（一）

试　　题

一、填空题（每题 2 分，共 20 分）

1. 已知函数 $f(x-1)=x^2$，则 $f(x+1)=$______________.

2. 设当 $x\to 0$ 时，$x+x^3$ 与 $a\sin x$ 等价无穷小，则 $a=$______________.

3. $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ 的间断点为______________，其类型为______________.

4. 对于函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $[-1,2]$ 上满足拉格朗日中值定理的点 ξ 是______.

5. $y=f(x)$ 有一个原函数为 $\sin x$，则 $\mathrm{d}y=$______________.

6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_x^{x^2}(1+t)\mathrm{d}t\right)=$______________.

7. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sqrt{1+x^8}}\mathrm{d}x=$______________.

8. 函数 e^x 的带有佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式是______________.

9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}=$______________.

10. $y=4x-x^2$，则此函数的增区间为______________，减区间为______________.

二、计算题（每题 5 分，共 50 分）

1. 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

2. 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}}{x-2}$.

3. 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t\mathrm{d}t}{x^4}$.

4. 已知 $y=x^{\sin x}\ (x>0)$，求 y'.

5. 设函数 $y=y(x)$，由方程 $y-x\mathrm{e}^y=1$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 在横坐标 $x=0$ 点处的切线方程.

6. 求由参数方程 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

7. 求 $\displaystyle\int\frac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x$.

8. 求 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

9. 求 $\displaystyle\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. 求 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

三、应用题（每题 5 分，共 10 分）

1. 计算由两条抛物线 $y^2=x, y=x^2$ 所围成的图形的面积.

2. 求题 1 中的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

四、证明题（每题 8 分，共 8 分）

设 $b>a>0$，证明 $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$.

五、求解下列微分方程（每题 6 分，共 12 分）

1. 求微分方程 $y''-y'=x$ 的通解.

2. 求微分方程 $y''+2y'+y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=4, y'|_{x=0}=-2$ 的特解.

参考答案

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，由已知可得 $f(t)=(t+1)^2$，即 $f(x)=(x+1)^2$，所以 $f(x+1)=(x+2)^2$.

2. 由已知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^3}{a\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{a\sin x}=1$，所以 $a=1$.

3. $x=0$ 为间断点，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=1$，所以为跳跃间断点.

4. $f'(\zeta)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{8+1}{3}=3=3\zeta^2, \zeta\in(-1,2)$，所以 $\xi=1$.

5. $-\sin x\mathrm{d}x$.

6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_x^{x^2}(1+t)\mathrm{d}t\right]=(1+x^2)2x-(1+x)=2x^3+x-1$.

7. 0.

8. $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

10. $y'=4-2x$，令 $y'=0$，则 $x=2$. 当 $x<2$ 时，函数单调递增；当 $x>2$，函数单调递减. 所以，函数的增区间为 $(-\infty,2]$，函数的减区间为 $[2,+\infty)$.

二、计算题（每题 5 分，共 50 分）

1. 解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2x(1+x)}=\dfrac{1}{2}$.

2. 解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{3x-4}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{\sqrt{3x-4}+\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x^2}{4x^3}=\dfrac{1}{2}$.

4. 解 $y=x^{\sin x}=\mathrm{e}^{\sin x\ln x}$.

$$y'=\mathrm{e}^{\sin x\ln x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

5. 解 $y-x\mathrm{e}^y=1$,

方程两边同时对 x 求导，得 $y'-(e^y+xe^y y')=0$，所以 $y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$.

当 $x=0$ 时，$y=1$，所以斜率 $k=y'|_{(0,1)}=e$，所求切线方程为 $y-1=ex$.

6. 解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}}=2t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=2(1+t^2)$.

7. 解 $\displaystyle\int\frac{x^3}{9+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{9+x^2}dx^2=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{9}{9+x^2}\right)dx^2=\frac{1}{2}\left[x^2-9\ln(9+x^2)\right]+C$.

8. 解 $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx\overset{\sqrt{x}=t}{=}2\int_0^1 e^t t dt=2\int_0^1 t de^t=2\left([te^t]_0^1-\int_0^1 e^t dt\right)=2(e-[e^t]_0^1)=2$.

9. 解 $\displaystyle\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\overset{x=\sin t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\cos t}\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt=[-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

10. 解 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}dx\overset{\sqrt[3]{x}=t}{=}\int_0^1\frac{3t^2}{1+t}dt=3\int_0^1\frac{t^2-1+1}{1+t}dt=3\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=3\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2\right)$.

三、应用题（每题 5 分，共 10 分）

解 1. $A=\displaystyle\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{1}{3}$.

2. $V=\pi\displaystyle\int_0^1(\sqrt{x})^2dx-\pi\int_0^1(x^2)^2dx=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}\pi$.

四、证明题（每题 8 分，共 8 分）

证明 令 $f(x)=\ln x$，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，

所以有 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),(a<\xi<b)$，

即 $\ln b-\ln a=\dfrac{b-a}{\xi}$，

因为 $a<\xi<b$，所以有 $\dfrac{b-a}{b}<\dfrac{b-a}{\xi}<\dfrac{b-a}{a}$，

即 $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$.

五、解微分方程（每题 6 分，共 12 分）

1. 解 令 $y'=p,y''=p'$，所以原方程化为 $p'-p=x$，

$\therefore p=e^{\int 1dx}\left(c_1+\displaystyle\int xe^{\int -1dx}dx\right)=c_1e^x-x-1$，

即 $y'=c_1e^x-x-1$，

所以所求通解为 $y=c_1e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x+c_2$.

2. 解 特征方程为 $r^2+2r+1=0,r_1=r_2=-1$，通解为 $y=(c_1+c_2x)e^{-x}$

由 $y(0)=4$ 得 $c_1=4$，

$y'=c_2e^{-x}-e^{-x}(c_1+c_2x)$，由 $y'(0)=-2$，$c_2=2$，

特解为 $y=(4+2x)e^{-x}$.

高等数学（上）期末考试试卷（二）

试　　题

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\ln(x-1)}$ 的定义域为____________.

2．设 $f(x+1)=x^2-3x+2$，则 $f\left(x\right)=$______________.

3．设 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$，则函数的可去间断点为 $x=$____________.

4．$y=x^3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为__________________.

5．$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & x<0,\\ a+x & x\geqslant 0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$__________.

6．$\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+c$，则 $f'(x)=$____________________.

7．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-7^n}{2^n+7^n-1}=$__________.

8．函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ 的水平渐近线为__________，铅直渐近线为___________.

9．$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \arctan t\mathrm{d}t=$________.

10．若 $(1,3)$ 是 $y=ax^2+bx^3$ 的拐点，则 $a=$______，$b=$___________.

二、求解下列各题（每题 5 分，共 50 分）

1．设 $y=\ln\cos(\mathrm{e}^x)$，求 y', $\mathrm{d}y$.

2．已知 $\mathrm{e}^{xy}=2x+y^3$，求 y' 及 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.

3．$\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-t},\\ y=2\mathrm{e}^t.\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

4．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

5．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

6．求方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

7．$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

8．$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x$.

9．$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\left|\ln x\right|\mathrm{d}x$.

10．已知函数 $f(x)=\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求函数的极值及单调区间.

三、应用题（每题 5 分，共 10 分）

1. 求由 $y^2=2x$ 及 $y=x-4$ 所围平面图形的面积.

2. 求由 $y=x^2, x=y^2$ 所围平面图形绕 y 轴旋转所产生的旋转体的体积.

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1. 证明当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

2. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ζ，使得 $f''(\zeta)=0$.

参考答案

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. $\{x\,|\,1<x\leqslant 4, x\neq 2\}$.

2. 令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)+2=t^2-5t+6$，所以 $f(x)=x^2-5x+6$.

3. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)}$，所以函数的可去间断点为 $x=1$.

4. $y'=3x^2$，$y'|_{x=1}=3$，所以 $y=x^3$ 在点 ________ 处的切线方程为 $y-1=3(x-1)$.

5. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$，所以 $a=1$.

6. $f(x)=\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=2x$，所以 $f'(x)=2$.

7. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-7^n}{2^n+7^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{7}\right)^n+1-\frac{1}{7^n}}=-1 .$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x-2}=1$，故 $y=1$ 是函数的水平渐近线；$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{x-2}=\infty$，故 $x=2$ 是函数的铅直渐近线.

9. $\arctan x$.

10. $y'=2ax+3bx^2$，$y''=2a+6bx$，由 $(1,3)$ 是函数的拐点，得 $y''|_{x=1}=0,\ y|_{x=1}=3$，即 $a+3b=0$，$3=a+b$，解得 $a=\dfrac{9}{2}, b=-\dfrac{3}{2}$.

二、求解下列各题（每题 5 分，共 50 分）

1. 解 $y'=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x)$.

$\mathrm{d}y=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$.

2. 解 $\mathrm{e}^{xy}\left(y+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=2+3y^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2-y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy}-3y^2}$，

$x=0$ 代入方程得 $y=1$，

$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-\dfrac{1}{3}$　　$\mathrm{d}y|_{x=0}=-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x$.

3. 解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2\mathrm{e}^{2t}$，　$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=4\mathrm{e}^{3t}$.

4. 解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$.

5. 解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^2\cdot\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)=\mathrm{e}^2$.

6. 解 特征方程为$r^2-2r-3=0$，解得特征根为$r_1=-1,r_2=3$，故方程的通解为$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$.

7. 解 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{1+(\mathrm{e}^x)^2}=\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{1+(\mathrm{e}^x)^2}=\arctan\mathrm{e}^x+C$.

8. 解 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x=x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$.

9. 解 $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\mathrm{d}x=-\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\ln x\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x=-x\ln x\,\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}+\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}1\mathrm{d}x+x\ln x\,\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{\mathrm{e}}+\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)+\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=2-\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

10. 解 $f'(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$，令$f'(x)=0$，得$x=0$为唯一驻点，且有$\begin{cases}f'(x)>0, & x>0,\\ f'(x)<0, & x<0.\end{cases}$ 所以$x=0$为函数$f(x)$的极小值点，极小值为$f(0)=0$． $(-\infty,0)$为函数的单调减少区间;$(0,+\infty)$为函数的单调增加区间.

三、应用题（每题 5 分，共 10 分）

解 **1.** $A=\displaystyle\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_{-2}^{4}=18$.

2. $V=\pi\displaystyle\int_0^1(y-y^4)\mathrm{d}y=\frac{3}{10}\pi$.

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1. 证明　令$f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，当$x>0$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$[0,\infty)$上单调递增，当$x>0$，$f(x)>f(0)=0$，所以得证.

2. 证明　由题意$f(x)$在$[x_1,x_2],[x_2,x_3]$上连续，在$(x_1,x_2),(x_2,x_3)$内可导，且$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，所以由罗尔定理至少存在点$\zeta_1\in(x_1,x_2),\zeta_2\in(x_2,x_3)$，使$f'(\zeta_1)=f'(\zeta_2)=0$.
又$f'(x)$在$[\zeta_1,\zeta_2]$上连续，在(ζ_1,ζ_2)内可导，再由罗尔定理至少存在点$\zeta\in(\zeta_1,\zeta_2)\subset(x_1,x_3)$，使得$f''(\zeta)=0$，得证.

参 考 文 献

[1] 同济大学数学系编. 高等数学习题全解指南（上册）. 北京：高等教育出版社，2007.
[2] 常桂娟等. 高等数学学习指导与习题解答（上册）. 北京：科学出版社，2013.